

1919.

No. 14.

45

GENERAL LIBRARY

FEB 10 1920

UNIV. OF CHICAGO

# ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. V. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 59. Heft 6.

DER GANZEN REIHE 364. BANDES 6. HEFT

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE  
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

DÖRRRIENSTRASSE 16.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 24 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 66 M.*

*Ausgegeben am 22. August 1919.*

## Inhalt.

	Seite
1. Marie Anna Schirmann. Dispersion und Polychroismus des polarisierten Lichtes, das von Einzeltheilen von der Größenordnung der Wellenlänge des Lichtes abgelenkt wird . . .	493
2. Ludwig Hopf. Zur Theorie der Turbulenz . . . . .	538
3. Clemens Schaefer und Martha Schubert. Die Rolle des Kristallwassers und die Struktur der Alaune. (Antwort an Hrn. L. Vegard) . . . . .	583

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

**Anderweitiger Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Zitate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.



4

1

1

L

O

s

U

d

s

f

s

L

O

L

O

S

n

O

S

L

O

S

L

O

S

L

O

S

L

O

S

L

O

S

L

O

S

L

O

S

L

O

S

L

O

S

L

O

S

L

O



# ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 59.

### *1. Dispersion und Polychroismus des polarisierten Lichtes, das von Einzelteilchen von der Größenordnung der Wellenlänge des Lichtes abgelenkt wird;<sup>1)</sup>*

*von Marie Anna Schirmann.*

**Inhalt.** § 1. Einleitung. — § 2. Bisherige experimentelle Polarisationsuntersuchungen an kolloidalen Lösungen. — § 3. Zweck der Untersuchung. — § 4. Theorie der Polarisation des an kleinen Kugeln diffus zerstreuten Lichtes. — § 5. Numerische Berechnung der Polarisation am Einzelteilchen in Abhängigkeit von der Wellenlänge des einfallenden Lichtes und vom Partikelradius. A) Für metallische Kügelchen. a) Dispersion der maximalen Polarisation des seitlich zerstreuten Lichtes. b) Vergleich mit der Erfahrung an wässrigen Metallösungen, speziell des Au-Kolloids. (Über die scheinbaren Abweichungen der Lage des Polarisationsmaximums der verschiedenen Mittelwertsbeobachtungen.) c) Verhalten „unendlich kleiner Teilchen“. d) Diskussion des Prozentgehaltes an polarisiertem Licht und Vergleich mit der Erfahrung an Lösungen. e) Diskussion der Gesamtstrahlung  $G = I_{\perp} + I_{\parallel}$ . B) Für dielektrische Kügelchen. a) Dispersion der maximalen Polarisation und Vergleich mit der Erfahrung an trüben Medien. b) Diskussion des Prozentgehaltes  $P$  an polarisiertem Licht und der Gesamtstrahlung  $G = I_{\perp} + I_{\parallel}$ . — § 6. Numerische Berechnung des Polychroismus des vom selben Einzelteilchen seitlich zerstreuten polarisierten Lichtes. — § 7. Neue optische Methoden zur Größenbestimmung submikroskopischer Einzelpartikel von Kugelform aus der Polarisation. — § 8. Zusammenfassung. — § 9. Tabelle der Koeffizienten  $a_p$  und  $p_p$  für Au im Gas.

#### § 1. Einleitung.

In vorliegender Abhandlung werden die Erscheinungen der Polarisation des an kleinen Partikeln abgelenkten Lichtes, deren Dimensionen von der Größenordnung der Lichtwellenlänge sind, näher behandelt.

Einzelteilchen dieser Größenordnung haben nämlich die Eigenschaft, eine Welle natürlichen Lichtes, die auf sie einfällt, diffus zu zerstreuen und zu polarisieren. Es ist möglich,

1) Aus den Berichten der Wiener Akademie der Wissenschaften teils auszugsweise, teils ergänzt mitgeteilt. M. A. Schirmann, Sitzungsber. d. Wiener Akad. 127. Abt. IIa. Heft 8. 1918.

die Frage der Polarisation am *Einzelteilchen* exakt zu behandeln, während die diesbezüglichen bisherigen Untersuchungen bloß einen *Gesamteffekt* beurteilten, der von *sehr vielen, niemals gleich großen Teilchen* herrührt, so daß die Resultate nur *statistische Mittelwerte von Größen* sind, durch die *verschiedene sich überlagernde Einzelphänomene* beschrieben werden. Dies trifft bei allen zurzeit bekannten Polarisationserscheinungen des seitlich zerstreuten Lichtes zu, die beim Durchgang eines Lichtstrahles durch ein trübes Medium auftreten, wie bei der Polarisation des Himmelslichtes und bei der Polarisation von sonstigen Kolloidsuspensionen in Gasen (z. B. beim farbigen Dampfstrahl), bei der Polarisation von festen kolloidalen Lösungen (z. B. bei Gelatine-Metallemulsionen und metallhaltigen farbigen Gläsern) und von flüssigen Suspensionen (z. B. bei Metallösungen und Emulsionen von Harzen), in welchen bekanntlich weder durch fraktionierendes Zentrifugieren, noch durch Ultrafiltration vollkommene Gleichheit der Partikel erzielt werden kann. Dieser Umstand macht es selbst bei praktisch unendlich verdünnten Lösungen noch notwendig durch *Untersuchungen am Einzelteilchen die Gesamtheit der verschiedenen Wirkungen in Einzelphänomene aufzulösen.*

## § 2. Bisherige experimentelle Polarisationsuntersuchungen an kolloidalen Lösungen.

Auch eine Zusammenstellung der Behandlung des Mittelwertsproblems trüber Medien mangelt bisher in der Literatur. Es möge darum im folgenden eine solche gegeben werden.

Fällt ein Lichtstrahl natürlichen oder polarisierten Lichtes in ein Medium, in dem Teilchen von den Dimensionen der Wellenlänge des Lichtes suspensiert sind, dann wird ein Teil der Strahlung seitlich zerstreut, der andere mehr oder weniger absorbiert bzw. durchgelassen. Nun ist folgende Annahme zugrunde gelegt: Die seitliche Beobachtungsrichtung bilde mit der einfallenden Strahlung die sogenannte „Visionsebene“, auf die der Schwingungszustand des abgebeugten Lichtes bezogen werden soll. Dieses ist erfahrungsgemäß teilweise linear polarisiert und hat bei einfallendem natürlichen Licht ein Maximum der Polarisation in allen Punkten, die auf einem Kegelmantel mit bestimmten Öffnungswinkel liegen (bei einfallendem polarisierten Licht liegt auf dem nämlichen Kegelmantel die Zone der minimalsten seitlichen Strahlung).

Die Frage nach der Größe des Winkels der maximalen Polarisation war schon seit langem Gegenstand experimenteller und theoretischer Untersuchungen. Die Entdeckung dieses Phänomens geht auf Arago<sup>1)</sup> (1809) zurück, welcher mit einem Nikol verschiedene Stellen des blauen Himmels beobachtete und fand, daß in gewissen Visionsrichtungen beim Drehen des Nikol um seine Achse das Gesichtsfeld Helligkeitsschwankungen aufweise, was auf eine mehr oder minder starke Polarisation des Himmelslichtes schließen lasse. Das zerstreute Licht sei partiell polarisiert und zwar sei die Polarisation am stärksten senkrecht zu den Sonnenstrahlen; unter kleineren Neigungswinkeln gegen diese, nehme sie stetig ab und werde in ihrer Richtung gleich Null. Manchmal lasse sich auch ein Gebiet negativer Polarisation und ein sogenannter neutraler Punkt ( $\text{Pol} = 0$ ) finden.

Das weitere Studium dieses Phänomens an den sogenannten trüben Medien verdankt man Tyndall<sup>2)</sup>: Wenn in ein durchsichtiges Medium, in dem feine dielektrische Teilchen suspendiert sind, ein natürlicher Lichtstrahl einfällt, so ist das diffus reflektierte Licht teilweise planpolarisiert und zwar am stärksten in jenen diffusen Strahlen, die in einer zum primären Strahl senkrechten Ebene zerstreut werden. (Das sogenannte „Tyndall-Phänomen“.)

Der erste, der die Polarisation kolloidaler Metallösungen einer diesbezüglichen Beobachtung unterzog, war Threlfall.<sup>3)</sup> Seine zur Prüfung der Thomsonschen Theorie an Suspensionen von Gold, Platin, Eisen und dergl. vorgenommenen Untersuchungen ergaben aber nur ganz kleine Abweichungen vom „Tyndall-Phänomen“ (um ca.  $2^\circ$  von  $90^\circ$ ).

J. M. Pernter<sup>4)</sup> hat in seiner Studie „Über die Polarisation des Lichtes in trüben Medien und des Himmelslichtes mit Rücksicht auf die Erklärung der blauen Farbe des Himmels“ gezeigt, daß bei stark konzentrierten Mastixsuspensionen für rotes Licht das Maximum der Polarisation noch bei  $90^\circ$ , für grünes und violettes jedoch um  $7^\circ$  davon entfernt war.

1) Aragos Werke, übersetzt von Hankel, Bd. 7, Abhandlung über die Polarisation des Lichtes.

2) Tyndall, Proceedings of the R. Society of London. 17. 1869.

3) Threlfall, Phil. Mag. (5) 38. p. 445. 1894.

4) J. M. Pernter, Denkschrift d. Wiener Akad. 73. 1901.

Auf eine Abhängigkeit der maximalen Polarisation der einzelnen Farben von der Teilchengröße hat auch schon Tyndall durch eine Reihe von Versuchen an trüben Medien hingedeutet, indem er bei größeren Teilchen eine Verschiebung des Maximums der Polarisation von  $90^\circ$  gegen die Lichtquelle konstatierte.

Der Beginn einer systematischen Untersuchung der Polarisationsverhältnisse an kleinen suspendierten Teilchen geht auf F. Ehrenhaft<sup>1)</sup> zurück, der das Verhalten isolierender Teilchen derselben Größenordnung im Gegensatz zu dem metallischer charakterisiert, eine Sonderung, die nicht bloß für die Anordnung des Themas zweckmäßig ist, sondern, wie wir sehen werden, im Wesen der Erscheinung wurzelt. Denn die Resultate seiner Untersuchungen sind durchaus verschiedene, je nachdem die Teilchen Isolatoren oder Leiter der Elektrizität sind. Trifft nämlich natürliches weißes Licht auf ein Medium, in dem kleine isolierende Partikel eingebettet sind, dann ist das diffus reflektierte Licht teilweise planpolarisiert und das Maximum der Polarisation liegt z. B. bei kolloidaler Kieselsäure unter  $90^\circ$ , bei kolloidalem Arsensulfid unter  $87^\circ 30'$  gegen den einfallenden Strahl. Wird dagegen Licht durch (dielektrizität) leitende Kügelchen zerstreut, so ist das diffus-reflektierte Licht auch teilweise planpolarisiert, aber das Polarisationsmaximum liegt bei kolloidalem Gold unter  $118$  bis  $120^\circ$ , bei kolloidalem Silber unter  $110^\circ$ , beim kolloidalem Kupfer unter  $120^\circ$ , beim kolloidalem Platin unter  $115^\circ$  gegen den einfallenden Strahl; mit fortschreitender Koagulation der suspendierten metallischen Partikel läßt sich ein deutliches Wandern des Winkels der maximalen Polarisation von größeren Winkeln gegen  $90^\circ$  zur Einfallsrichtung konstatieren. Seine an denselben Lösungen angestellten Experimente mit einfallendem natürlichem monochromatischen Licht haben den Zweck, den Einfluß der Wellenlänge auf den Polarisationsgrad unter dem Winkel der maximalen Polarisation zu untersuchen.

Die Ehrenhaftschen Versuche an kolloidalen Metallösungen wurden auf Veranlassung Quinckes von E. Müller<sup>2)</sup>

---

1) F. Ehrenhaft, Sitzungsber. d. Wiener Akad. 112. Abt. IIa. März 1903.

2) E. Müller, Ann. d. Phys. 24. p. 1. 1907.

wiederholt und ergaben ein mit dem Ehrenhafts vollkommen übereinstimmendes Resultat. Sie wurden auch insofern erweitert, als der Zusatz einer Spur eines „Schutzkolloids“ (z. B. Gelatine) die Polarisationsverhältnisse nicht ändert.

Ehrenhaft und Müller wählten eine mechanische Herstellungsart der metallischen Suspensionen, nämlich die Zerstäubung der betreffenden Metalle im elektrischen Lichtbogen.

Dagegen hat W. Steubing<sup>1)</sup> in einer experimentellen Untersuchung „Über die optischen Eigenschaften kolloidaler Goldlösungen“ an chemisch hergestellten Goldlösungen Messungen ausgeführt und die Lage des Polarisationsmaximums bei solchen Lösungen stets unter  $90^\circ$  gegen das einfallende Licht gefunden.

Schließlich hat auch E. Talbot<sup>2)</sup> für chemisch erzeugte wässrige Suspensionen von Silberkügelchen, deren Dimensionen zwischen ein und zwei Wellenlängen des Lichtes liegen, bei einfallendem monochromatischen Licht ( $\lambda = 550 \mu\mu$ ) ein Wandern des Polarisationsmaximums mit wachsendem Radius gegen größere Winkel nachgewiesen.

### § 3. Zweck der Untersuchung.

Diese auffallenden Gegensätze der experimentellen Resultate einerseits, die noch offene Frage nach den Farbeffekten des polarisierten abgelenkten Lichtes andererseits, erfordern also eine systematische exakte Behandlung des eingangs erörterten Polarisationsproblems, so daß es Zweck nachfolgender Untersuchung wird, die Frage nach der Lage des Polarisationsmaximums und nach den Farbenphänomenen des seitlich zerstreuten polarisierten Lichtes einer Beantwortung zuzuführen. Die leitenden Gesichtspunkte für die Behandlung dieses Gegenstandes seien im folgenden angeführt:

1. Im Gegensatz zu Untersuchungen an Lösungen, die sehr zahlreiche und ungleich große Teilchen enthalten, das Einzelpartikel in den Vordergrund der Betrachtung zu stellen.

2. Die Materialeigenschaft des Partikels mit Hilfe der optischen Konstanten, die durch rein optische Messungen am molaren Material gewonnen werden, zu definieren.

1) W. Steubing, Ann. d. Phys. **26**. p. 351. 1908.

2) E. Talbot, Phil. Mag. (6) **30**. p. 459. 1915.

3. Das umgebende Medium eines solchen Einzelteilchens durch seinen Brechungsexponenten zu berücksichtigen und die Phänomene an denselben Teilchen im Wasser und in Luft zu studieren.

4. Die Wellenlänge des auf Einzelpartikel bestimmter Größe auffallenden Lichtes zu variieren.

Für alle im folgenden durchgeführten theoretischen und experimentellen Untersuchungen der Polarisation am Einzelteilchen ist die Feststellung der Gestalt der Partikel von grundlegender Bedeutung.

Die Frage über die Berechtigung zur Annahme der Kugelgestalt kleinster durch Verdampfung erzeugter Teilchen, der hier in Betracht kommenden Substanzen, ist bereits in einer Diskussion von F. Ehrenhaft<sup>1)</sup> eingehend erörtert worden. Da hieraus die *Kugelgestalt* für Partikel bestimmten Materials in dieser Größenordnung *sichergestellt* zu sein scheint, soll die Theorie der Beugung des Lichtes *an kleinen Kugeln* herangezogen und schließlich mit der Erfahrung verglichen werden. Auch müssen die zu Tröpfchen erstarrten Kügelchen nicht amorph sein, sondern sie können ebensogut kristallinischer Struktur sein.

Der erste Teil der Polarisationsuntersuchungen am Einzelteilchen hat nun die Aufgabe, durch erweiterte Anwendung der optischen Theorie a) für Metalle, b) für Dielektrika:

1. Die verschiedene Deutung der bisherigen experimentellen Polarisationsergebnisse an den Lösungen unter einen Gesichtspunkt zu bringen,

2. neue Erkenntnisse über Farbenphänomene des von Einzelteilchen zerstreuten polarisierten Lichtes aus dem Bereich der Theorie zu schöpfen, um in einem zukünftigen zweiten Teil dieser Arbeit die theoretisch resultierenden Effekte in

1) Und zwar für verschiedene Partikel dieser Größenordnung schon in einer Untersuchung über die Unterschreitung der Elektronenladung. (Sitzungsber. d. Wiener Akad. 109. Abt. IIa [1] p. 815 und Phys. Zeitschr. 9. p. 619. 1910.) Für Hg- und Edelmetallteilchen im Edalgase in der Abhandlung „Über die Quanten der Elektrizität“ (Sitzungsber. d. Wiener Akad. 123. Abt. IIa, 1914; Phys. Zeitschr. 16. 1915). Für Schwefelpartikel in den Vortrag „Zur Physik des millionstel Zentimeters“. (Phys. Zeitschr. 18. 1917.)



qualitativer und quantitativer Hinsicht einer experimentellen Prüfung zu unterziehen.

Für das Verständnis der theoretischen Basis zur Berechnung der Polarisation ist es angezeigt, eine kurze übersichtliche Zusammenstellung der Theorien der Beugung des Lichtes an mikroskopischen und submikroskopischen Kugeln in ihrer Entwicklung zu geben.

#### § 4. Theorie der Polarisation des an kleine Kugeln diffus zerstreuten Lichtes.

Den Ausgangspunkt derartiger Betrachtungen bildet die Theorie Lord Rayleighs<sup>1)</sup>, welcher fern vom Ideenkreis der Kirchhoffschen Näherungstheorie der Beugung in seinen ersten Arbeiten noch auf dem Standpunkt der mechanischen Theorie des Lichtes (Stokes) stand, später jedoch seine Ergebnisse in die Sprache der elektromagnetischen Theorie übertrug und in den Maxwellschen Gleichungen das Fundament für die Behandlung der Polarisation dielektrischer Kügelchen erkannte. Die vereinfachende Annahme, daß die Dimensionen der Kügelchen gegen die Wellenlänge des Lichtes klein sind, führt zu folgenden Ergebnissen: Trifft eine ebene Welle natürlichen Lichtes auf eine solche Kugel, dann wird das zerstreute Licht in allen Punkten der durch das Zentrum der Kugel normal zum einfallenden Strahl gelegten Ebene vollständig polarisiert, wobei die bevorzugte Schwingungsrichtung senkrecht zum Primärstrahl ist. In tadellos reinen „trüben Medien“ verlangt die Rayleighsche Theorie gleiche — für dünne Schichten totale — Polarisation für alle Farben.

Die Polarisation kann aber, wie Soret<sup>2)</sup> bewiesen hat, nur bei jenem Licht eine totale sein, das nur einmal diffus zerstreut wurde. Erfährt ein Lichtstrahl eine mehrfache Zerstreuung an anderen Kugeln, so bleibt die Polarisationsebene, sowie die Lage des Maximums der Polarisation zwar dieselbe; durch die Komponenten des sekundär zerstreuten Lichtes wird jedoch die Totalität der Polarisation beeinträchtigt. Erst Theilchen von den Dimensionen der Lichtwellenlänge selbst werden Licht nach den gewöhnlichen Gesetzen der Optik

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. [5] 12. 1881.

2) Soret, Sur la polarisation atmosphérique. Archives de sciences de Genève. 20. p. 429. 1888.

reflektieren und so das Charakteristische der Erscheinung beinträchtigen.

In dem Artikel „Über die Zerstreuung elektrischer Wellen durch Metallkugeln“ hat J. J. Thomson<sup>1)</sup> das Analogon für kleine Kugeln von vollkommener Leitfähigkeit im Sinne der Maxwell'schen Theorie behandelt. Das von unendlich gut leitenden Kügelchen, die gegen die Wellenlänge des einfallenden Strahles klein sind, abgelenkte Licht, hat ein Polarisationsmaximum in allen Punkten eines Kegelmantels, dessen Erzeugende einen Winkel von  $120^\circ$  gegen die Einfallsrichtung bilden, wobei die bevorzugte Schwingungsrichtung normal zum primären Strahl ist.

F. Ehrenhaft<sup>2)</sup> hat in erster Näherung für den Thomsonschen Grenzfall unendlicher Leitfähigkeit, wie Thomson selbst, Metalle substituiert und das Verhalten in bezug auf Polarisation unter der Voraussetzung untersucht, daß die Kugeln zwar kleiner als die Wellenlänge des Lichtes sind, jedoch schon einen merklichen Bruchteil derselben betragen. Das Ergebnis dieser Polarisationsbetrachtung ist die Feststellung, daß der Winkel stärkster Polarisation mit wachsender Teilchengröße von  $120^\circ$  gegen  $90^\circ$  wandert.

In einer darauf folgenden, zwischen Pockels<sup>3)</sup> und Ehrenhaft<sup>4)</sup> stattgehabten Diskussion über die Berechtigung, ob man Metalle als Repräsentanten des idealen Thomsonschen Grenzfalles betrachten dürfe, wurde von beiden zur weiteren Klärung und Ausgestaltung des Beugungsproblems die Einführung der optischen Konstanten des kompakten Materials in die Theorie für notwendig erachtet.

Diese bezüglich der optischen Konstanten verallgemeinerte Theorie der Beugung des Lichtes an kleinen, mit der Wellenlänge des Lichtes vergleichbaren Kugeln verschiedenen Materials wurde von G. Mie<sup>5)</sup> in seinen „Beiträgen zur Optik trüber Medien“ entwickelt. Die Grundlage für seine Theorie der Polarisation des durch kleine Kugeln diffus zerstreuten Lichtes bilden in der her-

1) J. J. Thomson, Recent Researches in Electricity and Magnetism. 1893. p. 437.

2) F. Ehrenhaft, Sitzungsber. d. Wiener Akad. 114. Abt. IIa. 1905.

3) Pockels, Phys. Zeitschr. 5. p. 152, 460. 1904.

4) F. Ehrenhaft, Phys. Zeitschr. 5. p. 387. 1904; Sitzungsber. d. Wiener Akad. Abt. IIa, 114. p. 1140. 1905.

5) G. Mie, Ann. d. Phys. (4) 25. p. 377. 1908.



kömmlichen Weise die für das Problem regelmäßig periodischer Schwingungen spezialisierten Maxwell'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes. Das Prinzipielle liegt natürlich nicht in dem *elektromagnetischen* Charakter der Theorie, sondern in den für Undulationsvorstellungen charakteristischen *Differentialgleichungen*, welche unter bloßer Umdeutung der Koeffizienten für eine elastische Lichttheorie dieselben sind. Auch die Lösungen dieser Gleichungen durch Summen von Produkten einer Kugelfunktion in eine mit den Zylinderfunktionen nahe verwandte Funktion, wie sie für unsere Zwecke in Betracht kommen, sind aus den elastischen<sup>1)</sup> in die elektromagnetischen<sup>2)</sup> Lösungen übertragen worden. Die Lösung des vorliegenden Problems besteht darin, mit Hilfe der Gruppen von Partikulärintegralen, welche die durch elektrische, magnetische bzw. elektrische und magnetische Schwingungen der Kugel hervorgerufenen Wellen darstellen, die ebene, auf das kugelförmige Partikel auftreffende, ferner die von demselben gebrochene und reflektierte Welle mathematisch auszudrücken. Die elektrischen bzw. magnetischen Komponenten

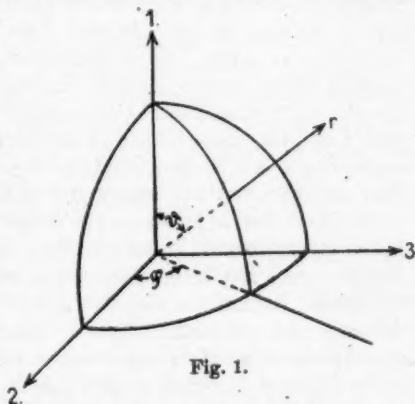


Fig. 1.

derselben in der Richtung des Radius ( $r$ ), des Meridians ( $\theta$ ) und des Breitenkreises ( $\varphi$ ) heißen für die einfallende ebene Welle  $E_r, E_\theta, E_\varphi$ ;  $M_r, M_\theta, M_\varphi$ , für die gebrochene und reflektierte Welle durch Anhängung des Suffix  $i$  bzw.  $a$  —  $E_{ri}, E_{\theta i}, E_{\varphi i}$ ;

1) Lord Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc. 4. p. 253. 1873 (Theory of Sound, § 334). — A. Clebsch, Crelles Journ. 61. p. 195. 1864. — A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität (Deutsch von A. Timpe). Leipzig 1907. p. 320.

2) J. J. Thomson, l. c. — K. Schwarzschild, Sitzungsber. d. Kgl. Bayr. Akad. d. W. 31. 1901. — F. Hasenöhr, Sitzungsber. d. Wiener Akad. 111. Abt. IIa, 1902 — G. Mie, l. c. — P. Debye, Ann. d. Phys. 30. 1909.

$M_{r,i}, M_{\theta,i}, M_{\varphi,i} - E_{r,a}, E_{\theta,a}, E_{\varphi,a}; M_{r,a}, M_{\theta,a}, M_{\varphi,a}$ . In diesen Ausdrücken treten Koeffizienten  $a_v$  und  $p_v$  auf, die durch Einführung der Grenzbedingungen an der Kugeloberfläche ermittelt werden können und physikalisch gedeutet, die  $v$ ten elektrischen bzw. magnetischen Partialwellen darstellen. Nach Mie ergeben sich für diese Koeffizienten folgende Formeln:

$$(1) \quad \begin{cases} a_v = + (2v+1) i^n \frac{I'_v(\alpha) I_v(\beta) \beta - I'_v(\beta) I_v(\alpha) \alpha}{K'_v(-\alpha) I_v(\beta) \beta - I'_v(\beta) K_v(-\alpha) \alpha}, \\ p_v = - (2v+1) i^n \frac{I_v(\alpha) I'_v(\beta) \beta - I_v(\beta) I'_v(\alpha) \alpha}{K_v(-\alpha) I'_v(\beta) \beta - I_v(\beta) K'_v(-\alpha) \alpha}, \end{cases}$$

wobei die  $I_v$  mit den Besselschen, die  $K_v$  mit den Hankelschen Zylinderfunktionen zusammenhängen<sup>1)</sup> und deren Argumente folgendermaßen zusammengesetzt sind:

$$\alpha = \frac{2\pi m_0 \varrho}{\lambda} = \frac{2\pi \varrho}{\lambda'},$$

$$\beta = \frac{2\pi m \varrho}{\lambda} = \frac{m}{m_0} \alpha = m' \alpha,$$

wobei  $\varrho$  den Radius des Kügelchens,  $m_0$  den Brechungsexponenten des umgebenden Mediums,  $m$  den gewöhnlichen oder komplexen Brechungsexponenten des Kugelmateri als bedeutet. Somit liegt das Charakteristische des Problems [ $\varrho$ ,  $m(\lambda)$ ,  $m_0(\lambda)$ ] bereits in diesen Partialschwingungen. Für beide Arten von Funktionen, in unendlichen konvergenten bzw. endlichen Reihen entwickelt, gelten sowohl für die reellen Argumente  $\alpha$  als auch für die komplexen  $\beta$  die den Zylinderfunktionen eigentümlichen Rekursionsformeln:

$$(2) \quad \begin{cases} (2v+1) \frac{I_v(x)}{x} = I_{v-1}(x) + I_{v+1}(x), \\ (2v+1) \frac{d I_v(x)}{dx} = (v+1) I_{v-1}(x) - v I_{v+1}(x). \end{cases}$$

Diese Relationen sind für die numerische Rechnung deshalb wertvoll, weil sie zu drei aufeinanderfolgenden Werten gehörige Funktionen miteinander verbinden.

Solche Ansätze werden der Bestimmung des elektromagnetischen Feldes im Innen- und Außenraum gerecht, so

---

1)  $I_v(x) = \left(\frac{\pi x}{2}\right)^{1/2} J_{v+1/2}(x),$   
 $K(-x) = \left(\frac{\pi x}{2}\right)^{1/2} H_{v+1/2}^{(2)}(x).$

daß sie zur numerischen Berechnung der Erscheinungen der Absorption, seitlichen Strahlung und Polarisation herangezogen werden können.

Da in unendlicher Entfernung vom Teilchen beobachtet wird und der hindurchgehende Strahl geradlinig polarisiert ist, folgt für die Intensität des diffus zerstreuten Lichtes, bezogen auf die Intensität des durchgehenden Lichtes als Einheit.<sup>1)</sup>

$$(3) \quad \begin{cases} J_{\theta} = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( \frac{a_{\nu}}{\nu(\nu+1)} \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \vartheta} + \frac{p_{\nu}}{\nu(\nu+1)} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu}}{\partial \varphi} \right) \right|^2, \\ J_{\varphi} = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( \frac{a_{\nu}}{\nu(\nu+1)} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \varphi} - \frac{p_{\nu}}{\nu(\nu+1)} \frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu}}{\partial \vartheta} \right) \right|^2. \end{cases}$$

Die beiden Intensitäten bedeuten die zum Meridian ( $J_{\theta}$ ) und die zum Breitenkreis ( $J_{\varphi}$ ) parallel schwingende Komponente. Infolge ihres Phasenunterschiedes muß das Licht schief zum durchgehenden Strahl im allgemeinen elliptisch polarisiert sein, mit Ausnahme aller Richtungen, die in den beiden Symmetrieebenen  $1 \cdot 3$  und  $2 \cdot 3$  liegen. Wird nun mit geradlinig polarisiertem Licht beleuchtet und in einer Richtung normal zu seiner elektrischen Schwingung beobachtet, so ist das seitlich zerstreute Licht geradlinig polarisiert, wobei seine elektrische Schwingungsrichtung parallel zu der des durchgehenden Strahles ist.

Für den Fall des einfallenden unpolarisierten Lichtes kann man sich (mit Mie) dasselbe in 2 inkohärente Strahlen gleicher Intensität zerlegt denken, die derart geradlinig polarisiert sind, daß die elektrische Schwingungsrichtung des einen normal auf der durch die Richtung des Strahles und den Visionsradius bestimmten Ebene steht, die des anderen aber in diese Ebene fällt. Das ausgestrahlte Licht ergibt dann ebenfalls 2 inkohärente, normal zueinander linear polarisierte Komponenten, welche im allgemeinen von verschiedener Intensität sind, das heißt: das ausgestrahlte Licht ist teilweise polarisiert.

1) G. Mie, l. c. Gleichung (78), p. 410. Die  $P_{\nu}$  und  $\mathfrak{P}_{\nu}$  hängen mit den gewöhnlichen Kugelfunktionen folgendermaßen zusammen:

$$P_{\nu} = \Pi_{\nu} \cos \vartheta, \quad \mathfrak{P}_{\nu} = \Pi_{\nu} \sin \vartheta \cos \varphi.$$

Da man gewöhnlich mit unpolarisierten Licht operiert, so sind nur die beiden Hauptgefälle:

$$\text{I. } \vartheta = \pi/2, \quad \text{II. } \varphi = \pm \pi/2$$

für unsere Zwecke von Interesse. Für beide Fälle ist

$$E_{\varphi} = M_{\varphi} = 0,$$

also bleibt nur  $J_{\vartheta}$ , das wir in den beiden Fällen als  $J_I$  und  $J_{II}$  auseinanderhalten wollen. Unter  $J_I$  soll die Intensität der Strahlung, deren Schwingungsrichtung normal zu der Visionsebene steht, unter  $J_{II}$  die Intensität des in der Visionsebene schwingenden Strahles verstanden werden.

Für die beiden Fälle gelten folgende Relationen:

$$(4) \quad \begin{cases} \text{I. } \vartheta = \pi/2, \quad \sin \varphi = v \\ \frac{\partial P_v}{\partial \vartheta} = -\Pi_v(v), \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_v}{\partial \varphi} = (1-v^2)\Pi_v'(v) - v\Pi_v(v), \\ \text{II. } \varphi = \pm \pi/2, \quad \sin \vartheta = \pm v \\ \frac{\partial P_v}{\partial \vartheta} = \pm \{(1-v^2)\Pi_v'(v) - v\Pi_v(v)\}, \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_v}{\partial \varphi} = \pm \Pi_v(v), \end{cases}$$

die in (8) einzusetzen sind.

Nun kann zur Berechnung der Polarisation des Lichtes in Abhängigkeit vom Winkel ( $\gamma$ ) gegen den durchgehenden Strahl übergegangen werden. In den Fällen I und II. bestehen nach dem obigen die Beziehungen:

$$(5) \quad \begin{cases} \text{I. } \vartheta = \pi/2, \quad \varphi = \pi/2 - \gamma, \quad v = \cos \gamma \\ J_I = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \left| \sum_1^{\infty} \left\{ \frac{a_v}{v(v+1)} \Pi_v + \frac{p_v}{v(1+v)} (v\Pi_v - (1-v^2)\Pi_v') \right\} \right|^2, \\ \text{II. } \varphi = \pi/2, \quad \vartheta = \pi/2 - \gamma, \quad v = \cos \gamma \\ J_{II} = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \left| \sum_1^{\infty} \left\{ \frac{a_v}{v(v+1)} (v\Pi_v - (1-v^2)\Pi_v') + \frac{p_v}{v(v+1)} \Pi_v \right\} \right|^2. \end{cases}$$

Da für die Berechnung der Polarisationskurven bloß die Kenntnis des relativen Wertes  $J_I/J_{II}$  von Belang ist, so beschränkt man sich zu ihrer Berechnung auf die Größen:

$$(6) \quad \mathfrak{J}_I = \frac{4\pi^2 r^2}{\lambda'^2} \frac{J_I}{a^6}, \quad \mathfrak{J}_{II} = \frac{4\pi^2 r^2}{\lambda'^2} \frac{J_{II}}{a^6}.$$

Für die numerische Berechnung der Polarisation von Metallkugeln genügen stets die ersten Glieder der Summen

in den Ausdrücken (5), in welche nur die ersten 2 elektrischen und die erste magnetische Partialwelle als ausschlaggebende Größen eingehen, so daß sich die Schlußformeln<sup>1)</sup> ergeben:

$$(7) \quad \begin{cases} \mathfrak{I}_I = |a_1 - (a_2 - p_1) \cos \gamma|^2, \\ \mathfrak{I}_{II} = |a_1 \cos \gamma - a_2 \cos 2\gamma + p_1|^2, \end{cases}$$

wobei abkürzungshalber

$$a_1 = \frac{\alpha_1}{2\alpha^3}, \quad a_2 = -\frac{\alpha_2}{2\alpha^3}, \quad p_1 = \frac{p_1}{2\alpha^3}$$

gesetzt wird.

Anders verhält es sich bei der Berechnung der Polarisation für *dielektrische Kügelchen*, bei denen bereits die ersten 3 elektrischen und die ersten 2 magnetischen Partialwellen eine maßgebende Rolle spielen. Durch Einführung der Kugelfunktionen und ihrer Derivierten für die Ordnungszahlen  $v = 0, 1, 2, 3$ ,

$$\Pi_0(v) = 0, \quad \Pi_1(v) = 1, \quad \Pi_2(v) = 3v, \quad \Pi_3(v) = \frac{15}{2}v^2 - \frac{3}{2},$$

$$\Pi'_0(v) = 0, \quad \Pi'_1(v) = 0, \quad \Pi'_2(v) = 3, \quad \Pi'_3(v) = 15v,$$

für den Fall I. und II. in (5) ergeben sich unter Vernachlässigung von  $p$  (weil diese Welle praktisch gegen die anderen Partialwellen verschwindet) Ausdrücke von der Gestalt:

$$(8) \quad \begin{cases} \mathfrak{I}_I = \frac{1}{\alpha^2} \left| \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}(a_2 + p_1) \cos \gamma + \frac{p_2}{2} \cos 2\gamma + \frac{a_3}{8}(5 \cos^2 \gamma - 1) \right|^2, \\ \mathfrak{I}_{II} = \frac{1}{\alpha^2} \left| \frac{p_1}{2} + \frac{1}{2}(a_1 + p_2) \cos \gamma + \frac{a_2}{2} \cos 2\gamma + \frac{a_3}{8}(15 \cos^3 \gamma - 11 \cos \gamma) \right|^2, \end{cases}$$

die sich durch folgende Abkürzungen für die Funktionen der trigonometrischen Funktionen von

$$\frac{1}{2} \cos \gamma = A, \quad \frac{1}{2} \cos 2\gamma = B, \quad \frac{1}{8}(5 \cos^2 \gamma - 1) = C,$$

$$\frac{1}{8}(15 \cos^3 \gamma - 11 \cos \gamma) = D$$

und für die Funktionen der elektrischen und magnetischen Partialwellen

$$\frac{a_1}{\alpha^3} = a'_1, \quad \frac{a_2}{\alpha^3} = a'_2, \quad \frac{a_3}{\alpha^3} = a'_3; \quad \frac{p_1}{\alpha^3} = p'_1, \quad \frac{p_2}{\alpha^3} = p'_2$$

1) Durch die geraden Striche soll angedeutet werden, daß von der zwischenliegenden komplexen Größe der absolute Betrag zu nehmen ist.

in einfacher Weise schreiben lassen:

$$(9) \quad \begin{cases} \mathfrak{I}_I = \left| \frac{a_1'}{2} + A(a_2' + p_1') + B p_2' + C a_3' \right|^2, \\ \mathfrak{I}_{II} = \left| \frac{p_1'}{2} + A(a_1' + p_2') + B a_2' + D a_3' \right|^2. \end{cases}$$

Die Koeffizienten  $a_r$  und  $p_r$  sind entweder direkt aus dem Radius des Kügelchens  $\varrho$  und aus den der betreffenden Wellenlänge entsprechenden Brechungsexponenten beider aneinander grenzender Materialien ( $m$ ,  $m_0$ ) mit Hilfe der Reihenentwicklungen für die Zylinderfunktionen durch Formel (1) zu berechnen oder durch graphische Interpolation aus Tabellen solcher für variable  $\varrho$  und  $\lambda$  bereits gerechneter Koeffizienten zu finden.

$\mathfrak{I}_I + \mathfrak{I}_{II}$  stellt die Gesamtstrahlung,  $\mathfrak{I}_I - \mathfrak{I}_{II}$  den Überschuß des polarisierten über den unpolarisierten Anteil, jedoch bloß in Relation zum Winkel  $\gamma$  dar, da sich die  $\mathfrak{I}$  von den  $J$  durch Koeffizienten unterscheiden, die sowohl vom Partikelradius als auch von der Wellenlänge abhängen und deren variabler Teil  $\varrho^6/\lambda^4$  ist. Für Zwecke der Polarisationskurven genügen jedoch jene relativen Werte  $\mathfrak{I}$ , da es bloß auf die Größe

$$P = \frac{\mathfrak{I}_I - \mathfrak{I}_{II}}{\mathfrak{I}_I + \mathfrak{I}_{II}},$$

also auf den prozentualen Gehalt an polarisiertem Licht ankommt. Den Ausdruck  $\mathfrak{I}_I + \mathfrak{I}_{II}$  für die gesamte zerstreute Strahlung auf  $(\mathfrak{I}_I + \mathfrak{I}_{II}) 90^\circ$  — die Gesamtstrahlung unter  $90^\circ$  — zu beziehen (wie es Mie getan hat), scheint aus bald erklärlichen Gründen zwecklos.

Auf Grund dieser theoretischen Überlegungen ist es möglich, die eingangs gestellten Probleme mathematisch zu erfassen und die für solche Zwecke entwickelten Formeln praktisch auszuwerten:

1. Für die numerische Berechnung der Polarisation nicht bloß in Abhängigkeit vom Winkel  $\gamma$  gegen den einfallenden Strahl bei einer ganz bestimmten Wellenlänge, sondern vor allem in Abhängigkeit von der *Wellenlänge* des auf ein Einzelpartikel einfallenden Lichtes für mehrere Partikelgrößen. (*Dispersion der Polarisation.*)

2. Für die Berechnung der zahlenmäßigen Übersicht der nur noch bis auf einen bei gleicher Beobachtungsweite kon-

stanten Faktor  $\left(\frac{4\pi^2}{r}\right)^2$  bestimmten Intensitäten  $I_{l,u} = \frac{q^2}{4} \mathfrak{I}_{l,u}$  des in verschiedenen Richtungen ( $\gamma$ ) gegen den einfallenden Strahl seitlich zerstreuten polarisierten Lichtes. Diese Intensitäten  $I$  bleiben also nicht mehr auf eine Partikelgröße und eine Wellenlänge beschränkt, sondern sie sind untereinander vergleichbar und werden, einerseits in ihrem Zusammenhang mit dem Winkel  $\gamma$  gegen die Einfallrichtung, andererseits bei bestimmten Winkel  $\gamma$  und bei Variation des Drehungswinkels  $\delta$  um die Visionsrichtung in der Frage nach dem Wesen des *Polychroismus* des von *kugelförmigen* Partikeln diffus zerstreuten polarisierten Lichtes Aufklärung schaffen. (Farbenänderung in Abhängigkeit von der Visionsrichtung und in Abhängigkeit von der Schwingungsrichtung der Komponenten des abgelenkten Lichtes.)

§ 5. Numerische Berechnung der Polarisation am Einzelteilchen in Abhängigkeit von der Wellenlänge des einfallenden Lichtes und vom Partikelradius.

Der langwierige Weg numerischer Berechnung der zu diskutierenden Polarisationsresultate mußte deshalb gewählt werden, weil eine allgemeine Diskussion der Schlußformeln wegen ihres komplizierten Baues in Zylinderfunktionen reellen und komplexen Argumentes voraussichtlich nicht möglich ist. Es wurde daher der Quotient

$$P = \frac{\mathfrak{I}_I - \mathfrak{I}_{II}}{\mathfrak{I}_I + \mathfrak{I}_{II}}$$

aus den Formeln (7) berechnet und in Prozentsen als Funktion des Winkels  $\gamma$  graphisch dargestellt. Diese sogenannten Polarisationskurven gehen von  $P = 0$  für  $\gamma = 0^\circ$  aus, steigen zu einem Maximum an und fallen wieder für  $\gamma = 180^\circ$  zu  $P = 0$  ab; oder sie sinken zuerst zu einem Minimum, steigen dann zu einem Maximum an und fallen wieder zu  $P = 0$  ab. Das Maximum und die positiven Ordinaten bedeuten ein mehr oder minder starkes Überwiegen der Strahlung, deren Schwingungsrichtung normal zur Visionsebene steht, das Minimum und die negativen Ordinaten ein Überwiegen der Strahlung, deren Schwingungsrichtung in der Visionsebene liegt. Den Übergang zwischen positiven und negativen Ordinaten bildet ein neutraler Punkt  $P = 0$ , in dem die Intensitäten der normal und parallel zur Visionsebene schwingenden Strahlungskompo-



nenten gleich groß sind. Die Form der Kurven ist abhängig von den Koeffizienten  $\alpha_r$  und  $p_r$ , in welche der Radius des Kügelchens  $\rho$  und der komplexe Brechungsexponent (als Funktion der Wellenlänge) eingeht.

Es wurden nun berechnet die Polarisationskurven für eine bestimmte Partikelgröße bei mehreren Wellenlängen ( $\lambda$ ) des sichtbaren Spektrums (bei Hg auch noch für ultraviolettes Licht) und für mehrere Partikelgrößen bei monochromatischem einfallenden Licht.

#### A. Für metallische Kügelchen.

Die in dieser Abhandlung untersuchten Metalle Hg und Au sind darum gewählt, weil sie sich in ihren bisher untersuchten optischen Eigenschaften (z. B. selektive Absorption) sehr verschieden verhalten. Die ebenso wichtige theoretische Behandlung der Polarisation des Ag sei einer zukünftigen Untersuchung vorbehalten.

Um den Einfluß des umgebenden Mediums zu erkennen, wurde Au nicht nur im gasförmigen, sondern auch im flüssigen Medium ( $H_2O$ ) untersucht.<sup>1)</sup>

Da, wie sich gezeigt hat, Einheiten der Größenordnung  $10^{-7}$  cm auf die Form der Kurven keinen wesentlichen Einfluß mehr haben, so wurde nur für Partikel gerechnet, deren Durchmesser um mehr als diese Größe auseinander liegen, also für „größere“ und „kleinere“ Partikel.

##### a) Dispersion der maximalen Polarisation des seitlich zerstreuten Lichtes.

Eine Dispersion der maximalen Polarisation des seitlich zerstreuten Lichtes (Verschiebung der Lage des Maximums mit der Wellenlänge) bei einfallendem monochromatischem Licht für verschiedene Wellenlängen und eine bestimmte Partikelgröße, oder bei zusammengesetztem, also weißem Licht oder einer Mischfarbe für Partikel verschiedener Größe geht deutlich aus nachfolgenden Polarisationskurven I—VII und Tab. 1 hervor.

1) Die der Berechnung zugrunde gelegten Konstanten waren entnommen: Die komplexen Brechungsexponenten des Goldes: E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. p. 1 u. 432. 1903. — Die komplexen Brechungsexponenten des Quecksilbers: W. Meier, Ann. d. Phys. 31. p. 1033. 1910. — Die Koeffizienten  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $p_1$  für Au in  $H_2O$ : G. Mie, Ann. d. Phys. (4) 25. p. 420 u. 426. 1908.



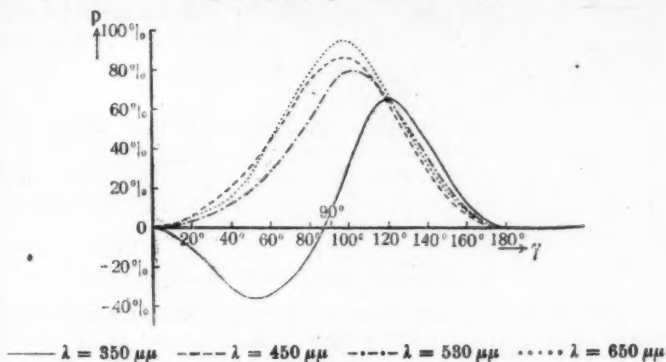
I. Hg im Gas ( $2\varrho = 16,8 \cdot 10^{-6}$  cm)

Fig. 2 (Kurve I).

In diesen Kurven liegen die Maxima bzw. Minima der Polarisation bei bestimmten Partikelgrößen und verschiedenen Wellenlängen des einfallenden Lichtes so, daß die Winkel für das Maximum der Polarisation der senkrecht und in der Visions-

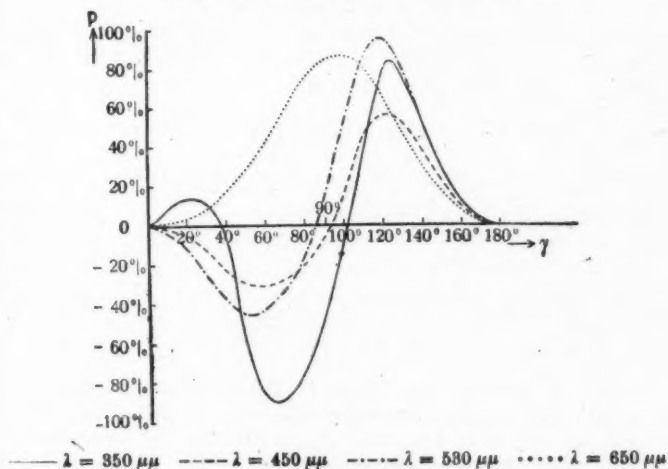
II. Hg im Gas ( $2\varrho = 21,5 \cdot 10^{-6}$  cm)

Fig. 3 (Kurve II).

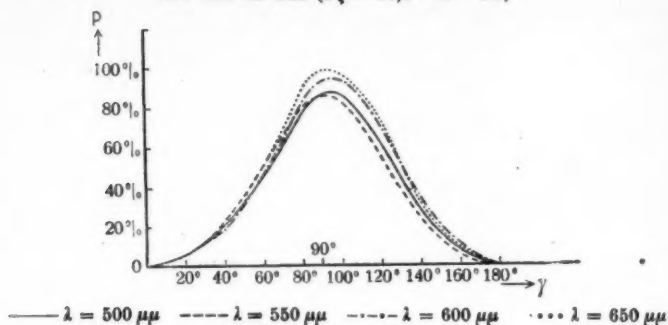
III. Au im Gas ( $2\varrho = 16,8 \cdot 10^{-8}$  cm)

Fig. 4 (Kurve III).

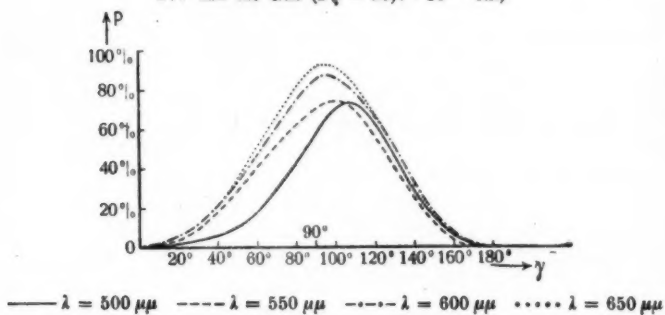
IV. Au im Gas ( $2\varrho = 20,7 \cdot 10^{-8}$  cm)

Fig. 5 (Kurve IV).

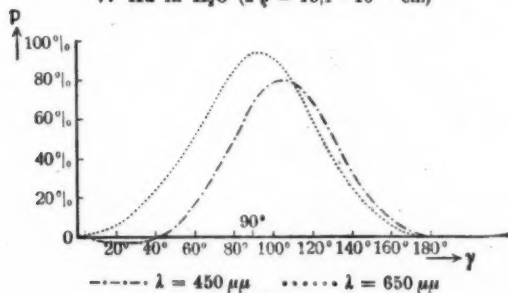
V. Au in  $H_2O$  ( $2\varrho = 15,1 \cdot 10^{-8}$  cm)

Fig. 6 (Kurve V).

ebene schwingenden Komponente —  $\gamma_{P_{\max}}$  bzw.  $\gamma_{P_{\min}}$  — der dazugehörigen Wellenlänge invers proportional sind und das Intervall von  $\gamma = 90^\circ$  bis  $\gamma > 90^\circ$  erfüllen.<sup>1)</sup>

VI. Au in  $H_2O$  ( $2\varrho = 16,8 \cdot 10^{-6}$  cm)

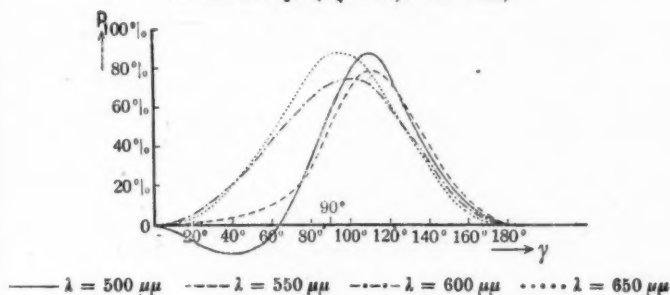


Fig. 7 (Kurve VI).

VII. Au in  $H_2O$  ( $2\varrho = 18,5 \cdot 10^{-6}$  cm)

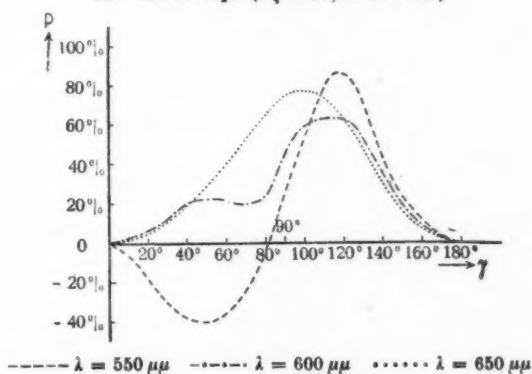


Fig. 8 (Kurve VII).

Inwiefern der Grad der Dispersion der maximalen Polarisation vom Teilchenmaterial, Kugelradius und umgebenden Medium abhängt, ist unschwer aus den Kurven zu ersehen.

<sup>1)</sup> Die obere Grenze des Intervalls für den Winkel  $\gamma$  ist vom Partikelradius, vom Kugel- und Umhüllungsmaterial abhängig.

Tabelle 1.

Dispersion der maximalen Polarisation des von kleineren und größeren Metallpartikeln diffus zerstreuten Lichtes.

Material	Umgebendes Medium	Kugeldurchmesser $2\varrho \cdot 10^6 \text{ cm}$	Wellenlänge des einfallenden Lichtes $\lambda \text{ in } \mu\mu$	Winkel der max. Polarisation $\gamma_{P_{\max}}$	Winkel der min. Polarisation $\gamma_{P_{\min}}$	Partikel-Nr.
Hg	Gas	16,8	650	96°	—	I
			530	102°	—	
			450	102°	—	
			350	120°	52°	
Hg	Gas	21,5	650	100°	—	II
			530	118°	51°	
			450	120°	60°	
			350	125°	66°	
Au	Gas	16,8	650	93°	—	III
			600	94°	—	
			550	95°	—	
			500	96°	—	
Au	Gas	20,7	650	96°	—	IV
			600	98°	—	
			550	102°	—	
			500	110°	—	
Au	H <sub>2</sub> O	15,1	650	94°	—	V
			450	106°	ca. 25°	
Au	H <sub>2</sub> O	16,8	650	95°	—	VI
			600	98°	—	
			550	109°	—	
			500	112°	—	
Au	H <sub>2</sub> O	18,5	650	100°	—	VII
			600	114°	—	
			550	118°	47°	

Es ist darin deutlich erkennbar, daß die Dispersion der maximalen Polarisation bei Au schwach, bei Hg hingegen sehr stark vorhanden ist, ferner daß größere Partikel, deren Dimensionen der Lichtwellenlänge näher kommen, der Dispersion der maximalen Polarisation einen weiteren Spielraum offen lassen, als kleinere. Schließlich kennzeichnet sich der Einfluß des umgebenden Mediums darin, daß Teilchen, die in einem optisch dichteren Medium als Gas (z. B. H<sub>2</sub>O) eingebettet sind, das Phänomen der Dispersion der maximalen Polarisation in einem höheren Grad zeigen.

Die Gebiete negativer Polarisation, also die  $P_{\min}$  für die  $S_r$ -Komponente (das sind  $P_{\max}$  für die  $S_n$ -Komponente), sind im Verlauf der Kurven nicht nur an größere Partikel, sondern auch an kleinere Wellenlängen (ebenfalls in Abhängigkeit vom Material) geknüpft.<sup>1)</sup>

Ferner beweisen die Kurven, daß sich bei verschiedener Partikelgröße und einfallendem monochromatischen Licht mit Wachsen der Teilchengröße die Lage des Winkels der maximalen Polarisation für die senkrecht und in der Visionsebene schwingende Komponente  $\gamma_{P_{\max}}$  bzw.  $\gamma_{P_{\min}}$  nach der Seite größerer Winkel verschiebt und daß die Maxima bzw. Minima das Intervall von  $\gamma = 90^\circ$  bis  $\gamma > 90^\circ$  erfüllen.<sup>2)</sup>

Trägt man nun dem Umstand Rechnung, daß das auf Partikel verschiedener Größe *einfallende Licht zusammengesetzt* ist, und stellt sich die Frage, ob es auch hier eine Dispersion der maximalen Polarisation gäbe, so kann nur unter Berücksichtigung der *seitlichen Ausstrahlung* von Partikel verschiedener Größe und verschiedenen Materials eine entscheidende Antwort gegeben werden. Die strenge Theorie der Beugung des Lichtes an Kugeln dieser Größenordnung hat bereits durch mehrfache experimentelle Prüfung am Einzelteilchen ihre Probe bestanden.<sup>3)</sup> Es ergibt sich nämlich für die in Frage kommenden Materialien ein gesetzmäßiger Zusammenhang zwischen der Größe und Farbe des abgelenkten Lichtes der Partikel und zwar ist mit abnehmender Größe die Farbe nach der Reihe der Spektralfarben (ultrarot  $\rightarrow$  ultraviolett) abgestuft.

Daher wird das Maximum der Polarisation wohl auch von der Partikelgröße abhängen, jedoch in einem ganz anderen Sinne als bei einfallendem monochromatischen Licht. Denn von der Teilchengröße wird in erster Linie die Farbe des seit-

1) Es entspricht dies einer weiteren Vergrößerung der genannten Argumente  $\alpha$  und  $\beta$  durch Verkleinerung von  $\lambda$  im Nenner.

2) Wie schon für  $\lambda = 550 \mu\mu$  G. Mie an Au-Kügelchen in  $H_2O$  und E. Talbot an Ag-Kügelchen in  $H_2O$  gezeigt hat, wie aus den Kurven (VIII) und (IXa u. IXb) hervorgeht. Die Kurve (IXb) stellt die experimentelle Verifikation von (IXa) dar. Die obere Grenze des Intervalls für den Winkel  $\gamma$  ist von der Wellenlänge, vom Kugel- und Umhüllungsmaterial abhängig.

3) F. Ehrenhaft, Phys. Zeitschr. 15. p. 2. 1914; 16. p. 2. 1915; G. Laaski, Ann. d. Phys. 58. p. 1. 1917.

lich zerstreuten Lichtes abhängen und diese vorzugsweise den Winkel der maximalen Polarisation bestimmen.

Somit sind für die Polarisation von Partikel, auf welche weißes Licht einfällt, zwei Verschiebungen der maximalen Polarisation zu berücksichtigen, eine kleinere Verschiebung mit wachsender Teilchengröße im Sinne größerwerdender Winkel ( $90^\circ \rightarrow 120^\circ$ ) und eine größere Verschiebung mit wachsender Wellenlänge im Sinne kleinerwerdender Winkel ( $120^\circ \rightarrow 90^\circ$ ). Da nun aber gerade größere Partikel die längeren Wellen zeitlich zerstreuen, so wird: Bei einfallendem weißen Licht das Polarisationsmaximum größerer Teilchen, trotz der kleinen Verschiebung gegen größere Winkel, doch bei kleineren Winkeln liegen, wie es den Polarisationskurven für größere Wellenlängen entspricht und umgekehrt für kleinere Teilchen, die kurze Wellen seitlich zerstreuen, bei größeren Winkeln; denn für die Lage des Polarisationsmaximums ist die den Partikelgrößen entsprechende Verschiebung gegenüber der den Wellenlängen entsprechenden nur von geringer Bedeutung, solange keine Extreme von Partikeldimensionen dieser Größenordnung vorliegen.

b) Vergleich mit der Erfahrung an wässrigen Metallösungen speziell des Au-Kolloids. (Über die scheinbaren Abweichungen der Lage des Polarisationsmaximums der verschiedenen Mittelwertsbeobachtungen.)

Während, wie wir noch sehen werden, die theoretischen Polarisationsresultate für dielektrische Kügelchen in jeder Hinsicht qualitativ mit den auch untereinander übereinstimmenden Beobachtungen und Versuchsreihen von Arago, Tyndall, Pernter und Ehrenhaft im Einklang stehen, liegen die Verhältnisse beim Metall ganz anders. Die bisherigen experimentellen Ergebnisse decken sich weder untereinander, noch sind sie infolge der mangelhaften Anwendung der Theorie mit dieser in Übereinstimmung gebracht worden.

Daher ist im folgenden auf Grund der Ergebnisse der erweitert angewendeten optischen Theorie, sowie einiger bisher unbeachtet gebliebener wichtiger Begleitumstände der Versuchsbedingungen der betreffenden Autoren eine einheitliche Deutung und zugleich eine Aufklärung der scheinbaren Gegensätze betreffend die Lage des Polarisationsmaximums wässriger Metallösungen, speziell des Au-Kolloids gegeben.

Erstens repräsentiert die *Art der Herstellung* der verwendeten Suspensionen wegen der Abhängigkeit der maximalen Polarisation von der Teilchengröße einen nicht zu unterschätzenden Faktor. Die eine Gruppe von Autoren, F. Ehrenhaft und E. Müller, wählen die *mechanische*, die andere, Threlfall, Steubing und Talbot, die *chemische* Erzeugung metallischer Suspensionen. Erstere besteht in einer Zerstäubung feiner Metalldrähte nach der Bredigschen Methode<sup>1)</sup> (unter Leitfähigkeitswasser im elektrischen Lichtbogen), letztere in der Einwirkung geeigneter Reduktionsmittel auf Verbindungen der betreffenden Metalle. Mag auch die Erzeugung der Suspension durch Zerstäubung wesentlich schwieriger sein, so gewährt sie aber dafür große Sicherheit für die Homogenität der Suspension, was bei der chemischen Erzeugung nicht gewährleistet wird. Ferner ist die Herstellungsart auf die Größe der erzeugten Partikel und die Reinheit der Lösung von wesentlichem Einfluß. Die mechanische Erzeugung ist in bezug auf Feinheit und Reinheit der Suspension der chemischen, bei der meist größere Partikel in verunreinigter Lösung entstehen, entschieden vorzuziehen, da die Versuchsergebnisse an mechanisch hergestellten Metallkügelchen, wie wir bald einsehen werden, klarer sein können.

Zweitens ist die Kenntnis der *Natur der auftretenden Strahlen* (die Zusammensetzung des einfallenden Lichtes) für die Klärung der bestehenden Unstimmigkeiten von prinzipieller Bedeutung und zwar muß wegen der Erscheinung der Dispersion der maximalen Polarisation bekannt sein, ob das einfallende Licht weiß (oder sonst irgendwie zusammengesetzt) oder monochromatisch ist.

Die Messungsergebnisse F. Ehrenhafts und E. Müllers, die mit mechanisch erzeugten Metallsuspensionen (Au) operiert und mit weißem Licht beleuchtet haben, ergeben, daß für kleine Partikel das Polarisationsmaximum in der Nähe von  $120^\circ$  liegt, während bei Koagulation die Lage dieses Maximums gegen  $90^\circ$  wandert, in voller Übereinstimmung mit der aus der Theorie gefolgerten Gesetzmäßigkeit betreffend die Lage des Polarisationsmaximums von Partikel bestimmter Größe bei einfallendem weißen Licht (in vorigen Abschnitt a).

1) G. Bredig, *Anorganische Fermente*. Leipzig, Verlag W. Engelmann, 1901.

Threilfall hat, ebenfalls bei Beleuchtung mit weißem Licht, unter anderem auch an kolloidalen Au-Lösungen das Polarisationsmaximum stets unter  $90^\circ$  gemessen, ein Ergebnis, das, im Sinne der Theorie gedeutet, darauf zurückzuführen ist, daß er entweder nur größere Partikel untersucht hat oder daß die chemisch erzeugten Lösungen inhomogen waren.

W. Steubing, der bei Beleuchtung mit weißem Licht chemisch hergestellte wässrige Au-Lösungen untersucht und das Polarisationsmaximum ebenfalls bei  $90^\circ$  gefunden hat, gibt selbst zu, daß es sehr schwierig war, Suspensionen mit kleineren Partikeln zu erhalten. Somit wird auch er größere Teilchen, die der Erzeugung zufolge nicht ganz frei von Verunreinigungen<sup>1)</sup> sein konnten, der Untersuchung unterzogen haben, während, wovon noch die Rede sein wird, seine indirekte Messungsmethode vom Standpunkt der Theorie gestattet war.

G. Mie und E. Talbot haben in Unkenntnis der Dispersion der maximalen Polarisation darauf hingedeutet, daß mit wachsender Partikelgröße das Maximum der Polarisation von  $90^\circ$  gegen  $120^\circ$  wandert, eine Tatsache, die aber bloß für monochromatisches Licht gilt und die daher nicht für Versuchsanordnungen mit weißem Licht als Beleuchtungsquelle (wie die von F. Ehrenhaft, E. Müller u. a.) zutreffen kann. Denn läßt man weißes Licht auf die Partikel einfallen und berücksichtigt einerseits die seitliche Ausstrahlung und den noch zu erörternden Polychroismus des polarisierten Lichtes bei verschiedener Visionsrichtung, andererseits die Dispersion der maximalen Polarisation des seitlich zerstreuten Lichtes, so folgt, daß kleinere Partikel, trotzdem die Winkel im allgemeinen gegenüber größeren Partikeln nach kleineren Winkeln verschoben sind, doch wegen der Ausstrahlung kürzerer Wellen ein Polarisationsmaximum bei größeren Winkeln haben, gemäß den Polarisationskurven für kürzere Wellenlängen. Größere Partikel aber, die hauptsächlich lange Wellen diffus zerstreuen, werden ein Polarisationsmaximum bei kleineren Winkeln haben, gemäß den Polarisationskurven für große Wellenlängen, obwohl bei größeren Partikeln die Maxima etwas nach größeren Winkeln verschoben sind. Denn die Verschiebung entsprechend

1) Die einzelnen Teilchen im kolloidalen Zustand der Materie haben eine ausgeprägte Tendenz, an Fremdkörpern fest zu haften.



den Partikelgrößen ist gegenüber der Verschiebung zufolge den Wellenlängen nur wenig bestimmend für die Lage des Polarisationsmaximums des abgelenkten Lichtes bei einfallendem weißen Licht, solange man mit keinen Extremwerten von Partikeldurchmessern dieser Größenordnung zu tun hat.

Es sind also bei Beachtung der die Teilchengröße beeinflussenden Herstellungsweise und der Beleuchtungsart im wesentlichen die scheinbaren Unstimmigkeiten auf Grund der Theorie der Dispersion der maximalen Polarisation und unter Berücksichtigung der seitlichen Ausstrahlung und des Polychroismus des in verschiedenen Visionsrichtungen seitlich ausgestrahlten polarisierten Lichtes aufgeklärt und diesbezügliche vorhandene Experimente und optische Theorie in vollste Übereinstimmung gebracht.

#### c) Verhalten „unendlich kleiner Teilchen“.

Es möge nun unter Beachtung der Dispersion der maximalen Polarisation das Verhalten unendlich kleiner Teilchen erörtert werden. In diesem Fall kommen die erste magnetische ( $p_1$ ) und die zweite elektrische Partialschwingung ( $a_2$ ), weil von bedeutend niedriger Ordnung, gegenüber der ersten elektrischen ( $a_1$ ) nicht mehr in Betracht, so daß man sich in den Formeln (7) bloß auf diese beschränken dürfte. Dann ist

$$\mathfrak{I}_I = a_1^2, \quad \mathfrak{I}_{II} = a_1^2 \cos^2 \gamma,$$

$$\mathfrak{I}_I - \mathfrak{I}_{II} = a_1^2 (1 - \cos^2 \gamma),$$

$$\mathfrak{I}_I + \mathfrak{I}_{II} = a_1^2 (1 + \cos^2 \gamma),$$

$$P = \frac{\mathfrak{I}_I - \mathfrak{I}_{II}}{\mathfrak{I}_I + \mathfrak{I}_{II}} \cdot \frac{1 - \cos^2 \gamma}{1 + \cos^2 \gamma},$$

somit ist aber  $P$  auch von  $a_1$  unabhängig, was also die sich zu beiden Seiten von  $\gamma = 90^\circ$  ergebende Symmetrie der Polarisationskurve mit einem 100 prozentigen Maximum bei  $90^\circ$  (totale Polarisation) (Fig. 9, Kurve X) für jedes Material in unendlich feiner Verteilung in Aussicht stellt.

Nun ist aber diesem idealen Grenzfall nur äußerst selten reale Bedeutung beizumessen. Denn Materieteilchen, die gerade noch der Beobachtung zugänglich sind, haben, wie aus den Kurven ersichtlich ist, eine *merkliche Dispersion* der maximalen Polarisation; daher kann die Kurve für unendlich kleine

Radien, unabhängig von der Wellenlänge und vom Material, nicht für alle noch beobachtbaren Fälle gültig sein.

X. Partikel beliebigen Materials ( $q = 0$ )

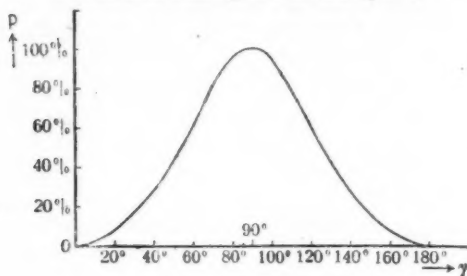


Fig. 9 (Kurve X).

d) Diskussion des Prozentgehaltes an polarisiertem Licht und Vergleich mit der Erfahrung an Lösungen.

Eine wichtige Frage ist die nach dem Prozentgehalt  $P$  an polarisiertem Licht und speziell im Maximum der seitlichen Strahlung. Aus den berechneten Kurven ergeben sich folgende Resultate: Für kleinere und größere Au-Kügelchen im gasförmigen Medium ist der Prozentgehalt im Maximum proportional der Wellenlänge  $\lambda$ , daher invers proportional dem dazugehörigen Winkel  $\gamma_{P_{\max}}$ . Anders verhält es sich mit Hg im Gas und Au in  $H_2O$ . Hier läßt sich für keine bestimmte Partikelgröße eine Gesetzmäßigkeit für den Prozentgehalt im Maximum ohne weiteres erkennen, ein Umstand, der wahrscheinlich auf das Zusammenwirken verschiedenartiger Einflüsse, wie Materialeigenschaft und umgebendes Medium, zurückzuführen ist. Dagegen ist der Prozentgehalt bei Au in  $H_2O$  im allgemeinen so verteilt, daß für Winkel  $\gamma < \gamma_{P_{\max}}$  der Prozentgehalt  $P$  proportional der Wellenlänge  $\lambda$  und für Winkel  $\gamma > \gamma_{P_{\max}}$  invers proportional dem  $\lambda$  ist.

Inwieweit diese theoretischen Ergebnisse mit den bereits experimentell gefundenen übereinstimmen, kann aus den Arbeiten von F. Ehrenhaft, W. Steubing und E. Müller ersehen werden.

Nachfolgende Tabelle aus F. Ehrenhatts<sup>1)</sup> Polarisationsversuchen enthält Angaben über die Abhängigkeit der Polarisation von der Wellenlänge unter einigen Winkeln gegen den einfallenden Strahl bei kolloidalen Au-Lösungen. Der Ausdruck  $100 \sin(\omega_2 - \omega_1)$  ist eine der Polarisation proportionale Größe (unter dem tatsächlich gemessenen Winkel maximaler Polarisation). Es steigt die Polarisation mit der Wellenlänge unter  $90^\circ$  und fällt mit der Wellenlänge unter  $120^\circ$  innerhalb des untersuchten Wellenlängenintervalls.

Abhängigkeit der Polarisation von der Wellenlänge des einfallenden Strahls.

Farbe des Lichtes	Unter $90^\circ$	$120^\circ$	$120^\circ$
	$100 \sin(\omega_2 - \omega_1)$	$100 \sin(\omega_2 - \omega_1)$	$100 \sin(\omega_2 - \omega_1)$
Rot	48,2	45,1	52,2
Orange-gelb	41,2	63,6	63,6
Grün	39,4	82,9	79,9
Grenze zwischen- Blau und Violett }	33,5	71,7	76,2
Weiß	41,6	55,9	58,8
Sorte	Au I	Au II	Au III

Bei den Steubingschen<sup>2)</sup> Versuchen fehlen direkte Messungen des Winkels maximaler Polarisation. Er hat aber aus den Ergebnissen der Müllerschen Experimente, daß das unter  $90^\circ$  etwa 90 Proz. polarisierte Licht sein Polarisationsmaximum auch unter  $90^\circ$  haben soll, den Schluß auf die Lage des Polarisationsmaximums unter  $90^\circ$  gezogen, was auch berechtigt ist und mit den Resultaten der optischen Theorie übereinstimmt. Der Schluß vom Prozentgehalt auf den Winkel der maximalen Polarisation ist aber nicht gestattet; denn die theoretischen Polarisationskurven für Au in  $H_2O$  zeigen, daß auch bei größeren Winkeln  $\gamma$  von dem abgebeugten Licht ca. 90 Proz. im Maximum polarisiert sein kann und daß auch bei kleineren Winkeln  $\gamma$  ein geringerer Prozentgehalt im Maximum möglich ist. Im allgemeinen ist allerdings der Polarisationsgrad bei jenen Kurven mit einem  $\gamma_{P_{max}} > 90^\circ$  kleiner

1) F. Ehrenhaft, Sitzungsber. d. Wiener Akad. 112. Abt. IIa, p. 13. März 1903.

2) W. Steubing, Ann. d. Phys. 26. p. 352. 1908.

als bei jenen, wo  $\gamma_{P_{\max}} = 90^\circ$  ist, jedoch im Maximum selbst muß das nicht immer der Fall sein.

In Hinsicht auf die eben zitierten graduellen Polarisationsverhältnisse trifft auch die von Müller<sup>1)</sup> erwähnte Gesetzmäßigkeit betreffend den Einfluß der Koagulation auf den wachsenden Prozentgehalt zu und dieses von ihm nach Soret durch die Konzentrationsänderung der Suspension bei der Koagulation nicht erklärbare Phänomen, findet im angedeuteten Sinn seinen Aufschluß: Mit Wachsen der Partikelgröße werden längere Wellen seitlich zerstreut und polarisiert und haben gemäß ihrem Polarisationsmaximum gegen  $90^\circ$  auch einen steigenden Polarisationsgrad.

e) Diskussion der Gesamtstrahlung  $G = I_1 + I_n$ .

Aus diesbezüglichen Tabellen Ib, IIb, IIIb, IVb, VIb, VIIb<sup>2)</sup> geht hervor, daß das Polarisationsmaximum  $P_{\max}$  bei kleineren und größeren Hg-Partikeln und bei kleineren Au-Partikeln im Gas stets im relativen Minimum der seitlichen Gesamtstrahlung liegt; in anderen Fällen muß dies nicht immer ganz zutreffen, weil entweder der Prozentgehalt im Maximum als solcher kein großer ist oder die seitliche Gesamtstrahlung mit  $\gamma$  stets zunimmt.

Die senkrecht und in der Visionsebene schwingenden Komponenten  $I_1$  bzw.  $I_n$  variieren (an und für sich) mit dem Winkel  $\gamma$  gegen den Einfallstrahl und der Wellenlänge mehr oder weniger und zwar — wie sich aus den Polarisationskurven ergibt — ganz ungleich.

Läßt sich schon aus dieser mit dem Winkel  $\gamma$  variablen Abhängigkeit der Intensität des normal und in der Visionsebene schwingenden polarisierten Lichtes von der Wellenlänge ein Rückschluß ziehen auf eine Verfärbung eines Kügelchens 1. bei Änderung der Beobachtungsrichtung in der Visionsebene, 2. bei Variation des Drehungswinkels um diese Richtung für den Fall des einfallenden weißen Lichtes? Das ist dann der Fall, wenn die in verschiedenen Richtungen resultierenden zusammengesetzten Farben der beiden Komponenten verschiedenen Ton und verschiedene Sättigung haben. Über diesen Punkt soll aber erst der § 6 Aufschluß geben.

1) E. Müller, Ann. d. Phys. **24**. p. 18. 1907.

2) M. A. Schirmann, l. c. im Anhang.

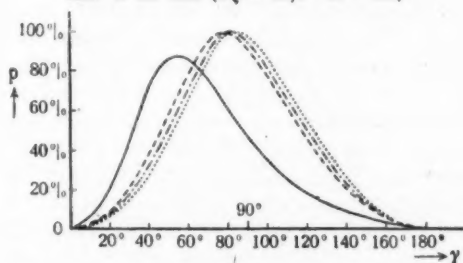
## B. Für dielektrische Kügelchen.

Als typischer Vertreter dielektrischer Kügelchen wurde Schwefel gewählt, weil er in der untersuchten Größenordnung als Kügelchen<sup>1)</sup> auftritt. Die sicherlich ebenso interessanten Polarisierungsergebnisse an kleinen Wassertropfchen, die in der kosmischen Physik eine bedeutende Rolle spielen, sollen in Zukunft behandelt werden.

Die unter Berücksichtigung der Wellenlänge des einfallenden Lichtes und der individuellen Größe der im Gas gelagerten Schwefelpartikel ausgeführten Polarisationsberechnungen waren darum komplizierter als bei Metallkügelchen, weil außer den ersten 2 elektrischen und der ersten magnetischen Partialwelle noch die dritte elektrische und zweite magnetische maßgebend sind, so daß die eingangs abgeleiteten Formeln (9) herangezogen werden mußten.

## a) Dispersion der maximalen Polarisation und Vergleich mit der Erfahrung an trüben Medien.

Aus nachfolgenden Polarisationskurven XI und XII für ein kleineres und größeres S-Kügelchen erhellt deutlich eine Dispersion des maximal polarisierten Lichtes bei einfallendem

XI. S im Gas ( $2\rho = 15,7 \cdot 10^{-8}$  cm)

—  $\lambda = 400 \mu\mu$     ----  $\lambda = 450 \mu\mu$     -.-.-  $\lambda = 550 \mu\mu$     .....  $\lambda = 650 \mu\mu$   
Fig. 10 (Kurve X).

Licht verschiedener Wellenlänge für eine bestimmte Teilchengröße und bei einfallendem weißen Licht für verschiedene Partikelgrößen.<sup>2)</sup>

1) Durch Verdampfung erzeugt.

2) Das untersuchte Wellenlängenintervall war entsprechend der seitlichen Ausstrahlung für Partikel verschiedener Größe für  $2\rho =$

Bei großen Partikeln und kleiner Wellenlänge überwiegt die negative Polarisation und nur ein kleines Winkelintervall  $\gamma$  zeigt jenseits des sogenannten neutralen Punktes minimale positive Polarisation.

XII. S im Gas ( $2\varrho = 23,2 \cdot 10^{-6}$  cm)

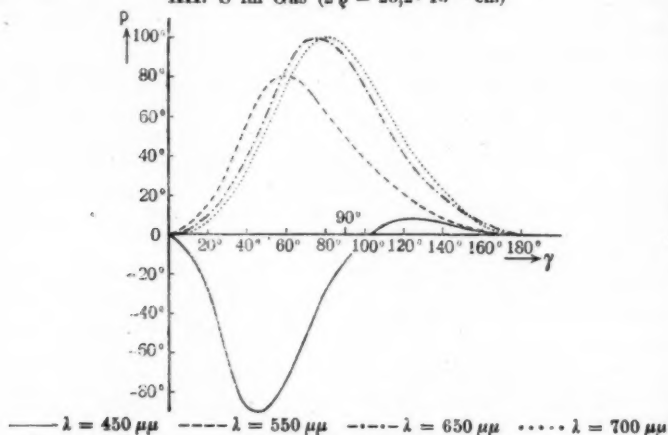


Fig. 11 (Kurve XII).

Folgende Tabelle enthält die Ergebnisse der Dispersion der maximalen Polarisation kleinerer und größerer Schwefelkügelchen (entsprechend den Polarisationskurven XI und XII).

Tabelle 2.

Material	Umgebendes Medium	Kugeldurchmesser $2\varrho \cdot 10^6$ cm	Wellenlänge des einfallend. Lichtes $\lambda$ in $\mu\mu$	Winkel der max. Polarisation $\gamma_{P_{\max}}$	Winkel der min. Polarisation $\gamma_{P_{\min}}$	Partikel-Nr.
S	Gas	15,7	650	85°	—	X
			550	81°	—	
			450	77°	—	
			400	54°	—	
S	Gas	23,2	700	82°	—	XI
			650	77°	—	
			550	60°	—	
			450	ca. 122°	46°	

$15,7 \cdot 10^{-6}$  cm zwischen  $\lambda = 650 \mu\mu$  und  $\lambda = 400 \mu\mu$  für  $2\varrho = 23,2 \cdot 10^{-6}$  cm zwischen  $\lambda = 700 \mu\mu$  und  $\lambda = 400 \mu\mu$  gewählt, ein Umstand, dem auch bei den Metallen Au und Hg Rechnung getragen war.

In diesen Kurven liegen die Maxima bzw. Minima der Polarisation für dieselbe Partikelgröße bei verschiedenen Wellenlängen des einfallenden Lichtes so, daß die Winkel für das Maximum der Polarisation der senkrecht und in der Visions-ebene schwingenden Komponenten  $I_I$  und  $I_{II}$  der dazugehörigen Wellenlänge direkt proportional sind und das Intervall zwischen  $\gamma = 90^\circ$  und  $\gamma < 90^\circ$  erfüllen.

Ferner beweisen die Kurven, daß sich bei einfallendem monochromatischen Licht und Partikel verschiedener Größe mit Wachsen der Teilchengröße die Lage des Winkels der maximalen Polarisation für beide Komponenten  $\gamma_{P_{\max}}$  bzw.  $\gamma_{P_{\min}}$  nach der Seite kleinerer Winkel verschiebt und daß die Maxima bzw. Minima das Intervall von  $\gamma = 90^\circ$  bis  $\gamma < 90^\circ$  erfüllen.

Das Verschiebungsintervall für den Winkel der maximalen Polarisation ist auch beim Dielektrikum innerhalb der untersuchten Wellenlängen beim kleineren Partikel kleiner als beim größeren.

Das sind Tatsachen, die mit den eingangs zitierten experimentellen Polarisationsresultaten Tyndalls und Pernters in vollster Übereinstimmung stehen. Die Polarisationsuntersuchungen an trüben Medien (suspendierte dielektrische Teilchen) sind schon viel früher und mit größerer Umsicht angestellt worden, als an kolloidalen Metallösungen.

Zuerst hat Tyndall eine Verschiebung der maximalen Polarisation mit wachsender Teilchengröße bei einfallendem weißen Licht feststellen können; später hat dann Pernter eine Abhängigkeit der maximalen Polarisation von den verschiedenen Spektralfarben des einfallenden Lichtes konstatiert. Das Detail ihrer diesbezüglichen Untersuchung ist bereits in dem einleitenden § 2 näher ausgeführt worden.

Da weiter die Farbe des seitlich zerstreuten Lichtes vornehmlich von der Teilchengröße abhängt, so wird der Winkel der maximalen Polarisation in erster Linie durch diese abgelenkte Lichtsorte bestimmt. Nun zerstreuen aber gerade größere Partikel längere Wellen, also wird:

Bei einfallendem weißen Licht das Polarisationsmaximum größerer Teilchen, trotz der kleinen Verschiebung gegen kleinere Winkel, doch bei größeren Winkeln liegen, wie es den Polarisationskurven für größere Wellenlängen entspricht und um-



gekehrt für kleinere Teilchen, die kurze Wellen seitlich zerstreuen, bei kleineren Winkeln, da auch hier die den Wellenlängen entsprechende Verschiebung die Ausschlaggebende ist.

b) Diskussion des Prozentgehaltes  $P$  an polarisiertem Licht und der Gesamtstrahlung  $G = I_1 + I_{II}$ .

Solange das Verhältnis  $2\rho/\lambda$  nicht zu groß wird, ist fast das gesamte zerstreute Licht polarisiert, es schwingt also keine Komponente in der Visionsebene. In den anderen Fällen ist ca. 80—90 Proz. im Maximum polarisiert. Der Grad positiver Polarisation ist im allgemeinen so verteilt, daß für Winkel  $\gamma < 80^\circ$  der Prozentgehalt  $P$  invers proportional mit  $\lambda$  ist und für Winkel  $\gamma > 80^\circ$  proportional mit  $\lambda$ ; also umgekehrte Verhältnisse als z. B. beim Au in  $H_2O$ .

Qualitativ stimmen diese Polarisationsverhältnisse mit der von F. Ehrenhaft<sup>1)</sup> beim Arsensulfit untersuchten Abhängigkeit des Prozentgehaltes an polarisiertem Licht von der Farbe des einfallenden Lichtes.

Die auch im übrigen umgekehrten Verhältnisse beim Dielektrikum offenbaren sich nicht nur in der Dispersion der Polarisation, sondern auch in der Gestalt jener Kurve negativer Polarisation (XII,  $2\rho = 23,2 \cdot 10^{-6}$  cm,  $\lambda = 450 \mu\mu$ ).<sup>2)</sup> Diese augenfällige, wahrscheinlich allgemeine Unterscheidung des elektromagnetischen Charakters des Materials könnte anregen, auch die entgegengesetzten Wirkungen, welche die Lichtkräfte auf Partikel dieser Materialien ausüben mit Hilfe der elektromagnetischen Beugungstheorie berechnen zu wollen. Nun läßt sich aber aus der Debyeschen Beugungstheorie keine sogenannte lichtnegative Bewegung der Schwefelpartikel<sup>3)</sup> berechnen.

Die Lage des Polarisationsmaximums im Minimum der seitlichen Gesamtstrahlung ist für ein kleines Partikel bei großer Wellenlänge erfüllt; im übrigen liegt mit Abnahme von  $\lambda$  das Maximum schon bei größeren Werten der Gesamt-

1) F. Ehrenhaft, Sitzungsber. d. Wiener Akad. 112. Abt. IIa. p. 10. März 1903.

2) Die Kurve für  $\lambda = 450 \mu\mu$  in XII hat merkwürdigerweise ein 90prozentiges Maximum negativer Polarisation und einen neutralen Punkt bei  $102^\circ$ .

3) F. Ehrenhaft, Ann. d. Phys. 56. p. 81. 1918.



strahlung, was aus den Strahlungsverhältnissen bei kleineren Winkeln erhellt. Da die Intensitäten beider Komponenten untereinander und mit variablen  $\gamma$  verschieden sind, hat die folgende Frage vollauf Berechtigung:

Sind auch beim Schwefel Verfärbungen im polarisierten Licht bei Variation des Winkels  $\gamma$  gegen die Einfallrichtung und bei Drehung eines in bestimmter Visionsrichtung justierten Analysators um seine Achse zu erwarten?

Dieses interessante Phänomen wird sich im folgenden § 6 bei einseitiger Beleuchtung mit weißem Licht als eine mit der Kugelgestalt vereinbare Erscheinung ergeben.

**§ 6. Numerische Berechnung  
des Polychroismus des vom selben Einzelteilchen seitlich  
zerstreuten polarisierten Lichtes.**

Auf Grund der in der Theorie für eine bestimmte ausgezeichnete Ebene (Visionsebene) geltenden Polarisationsverhältnisse lassen sich bei einfallendem weißen Licht zwei Arten von Polychroismus des polarisierten Lichtes unterscheiden. Die erste besteht in einer Farbenänderung des seitlich zerstreuten polarisierten Lichtes ( $I_r$ -Komponente), sobald der Winkel  $\gamma$  gegen den Einfallsstrahl variiert wird, da die in verschiedenen Richtungen resultierenden Farben des polarisierten Lichtes verschieden sind. (*Polychroismus bei Änderung der Visionsrichtung.*)

Die zweite Art besteht auf Grund der verschiedenen resultierenden Farben der senkrecht und in der Visionsebene schwingenden Komponenten in einer Verfärbung des diffus strahlenden Kugelhens bei Drehung eines in ganz bestimmter Visionsrichtung ( $\gamma$ ) justierten Analysators um seine Achse (um den Drehungswinkel  $\delta$ ). (*Polychroismus bei Drehung des Analysators.*)

Um diese Phänomene, die bereits als vereinbar mit der Kugelgestalt in Aussicht gestellt worden sind, aus tabellarischen Aufstellungen von Zahlenreihen leicht ersichtlich zu machen, war die schon im § 4 angedeutete Berechnung der bis auf einen von den hier in Betracht kommenden variablen Größen unabhängigen Faktor bestimmten Intensitäten  $I$  bei mehreren

Wellenlängen des sichtbaren Spektrums<sup>1)</sup> und zwar für kleinere und größere Kügelchen metallischen und dielektrischen Materials im Gas (bei Au auch in  $H_2O$ ) durchgeführt worden. Eine gesonderte Behandlung metallischer und dielektrischer Kügelchen scheint hier zwecklos, da sich bei der Erscheinung des Polychroismus diesbezüglich keine prinzipiell qualitativen, sondern nur quantitative Unterschiede geltend machen.

Ein Vergleich der unter bestimmten Winkeln ausgestrahlten Intensitäten  $I_i$  verschiedener Wellenlängen kann über den Farbeindruck in bestimmter Visionsrichtung gegen den Einfallstrahl und über die Verfärbung des Kügelchens bei Änderung dieser Beobachtungsrichtung bei einfallendem weißen Licht genau orientieren. (Tab. Ib bis VIIb, Xb, XIb und Kurven \*I bis \*VII, \*X, \*XI.<sup>2)</sup>

Die Ermittlung der resultierenden Farben geschah unter Berücksichtigung der Helmholtzschen<sup>3)</sup> Mischungsregel für Farben, die in der Spektralreihe weniger voneinander absteigen als Komplementärfarben; die Mischung ergibt dann eine der zwischenliegenden Farben und zieht im allgemeinen desto mehr ins Weiße, je größer der Abstand der gemischten Farben ist, wird dagegen desto gesättigter, je kleiner ihr Abstand ist.

Interessant sind die auf diese Weise erschlossenen Farbenkontraste der senkrecht zur Visionsebene schwingenden Komponente ( $I_i$ ) bei Änderung der Visionsrichtung um ca. 100 von kleineren Winkeln  $\gamma$  zu größeren, die in folgenden Tabellen verzeichnet sind.

Aus diesen Angaben erhellt nicht nur die deutliche Abhängigkeit des Polychroismus vom Material, sondern auch von der Teilchengröße und dem umgebenden Medium. So zeigt

1) Alle aus folgenden Überlegungen gezogenen Schlüsse gehen von der Annahme aus, daß das einfallende Licht tatsächlich als weiß vorausgesetzt sei. Da nun in praxi (meist) mit Bogenlicht operiert wird, so ist es notwendig, zu untersuchen, ob und inwieweit sich das Phänomen des Polychroismus ändert, wenn man die verschiedene Intensitätsverteilung in Kohlenbogenspektrum berücksichtigt, wobei sich dann dieselben Untersuchungen auf  $A = c_\lambda I$  beziehen, wenn  $c_\lambda$  eine für bestimmte  $\lambda$ -Werte konstante Größe ist, die der Verteilungskurve des Kohlenbogenspektrums entnommen ist. (Snow, Ann. d. Phys. 47. p. 208. 1892.)

2) M. A. Schirmann, l. c. Im Anhang.

3) H. v. Helmholtz, Physiologische Optik, II. Aufl. p. 320.

Tabelle 3.

Farben, des seitlich zerstreuten polarisierten Lichtes, wenn im einfallenden weißem Licht die Wellenlängen spektral verteilt sind.

Sorte	Winkel $\gamma$		Größe
	40°	140°	
Hg im Gas	orange gelb	grün	größere Partikel (ca. $23 \cdot 10^{-6}$ cm)
Au im Gas	gelb	gelbgrün	
Au in $H_2O$	orange gelb	gelbgrün	
S im Gas	orange gelb	grün	
Hg im Gas	grün	blau	kleinere Partikel (ca. $16 \cdot 10^{-6}$ cm)
Au im Gas	grünlichgelb	grünlichgelb	
Au in $H_2O$	gelb	gelbgrün	
S im Gas	blau	violett	

Tabelle 4.

Farben des seitlich zerstreuten polarisierten Lichtes, wenn mit Bogenlicht beleuchtet wird.  
(Unter Berücksichtigung des Kohlenbogenspektrums.)

Sorte	Winkel $\gamma$		Größe
	40°	140°	
Hg im Gas	rötlichorange	gelbgrün	größere Partikel (ca. $23 \cdot 10^{-6}$ cm)
Au im Gas	orange gelb	gelb	
Au in $H_2O$	orange	grünlichgelb	
S im Gas	orange	gelbgrün	
Hg im Gas	gelbgrün	blaugrün	kleinere Partikel (ca. $16 \cdot 10^{-6}$ cm)
Au im Gas	gelb	gelb	
Au in $H_2O$	orange gelb	grünlichgelb	
S im Gas	blaugrün	zyanblau	

Hg im Gas einen ausgesprochenen Polychroismus bei Änderung der Visionsrichtung, ob kleinere oder größere Partikel, ein Grad der Abhängigkeit von der Teilchengröße, der schon gelegentlich der Dispersion der maximalen Polarisation Beachtung gefunden hat. Das kleinere Hg-Partikel verändert seine anfänglich grüne Farbe in blau, das größere seine orange gelbe Farbe in gelb bis grün, zeigt also stärkeren Polychroismus als das kleinere Partikel. Au im Gas hat, sofern die Kügelchen noch größer sind, einen schwachen Polychroismus, der aber immerhin beobachtbar sein müßte, während er an kleineren Kügelchen nicht mehr bemerkt werden kann. Au in  $H_2O$  zeigt einen deutlichen Farbenwechsel und zwar die kleineren

gelb-gelbgrün, die größeren orangegelb-gelbgrün.<sup>1)</sup> Größere und kleinere Schwefelkügelchen zeigen die Erscheinung des Polychroismus in demselben Ausmaß wie Hg-Partikel.

Was die Intensitätsänderung der  $I_r$ -Komponente zwischen kleinen ( $\gamma = \text{ca. } 40^\circ$ ) und großen Winkeln ( $\gamma = \text{ca. } 140^\circ$ ) gegen den Einfallsstrahl betrifft, so geschieht sie bei

großen Hg Partikeln im Gas im Verhältnis ca. 1 : 4					
„ Au „ im Gas „ „ „ 2 : 3					
„ Au „ in $\text{H}_2\text{O}$ „ „ „ 1 : 3					
„ S „ im Gas „ „ „ 1 : 16					
kleinen Hg „ im Gas „ „ „ 1 : 1					
„ Au „ im Gas „ „ „ 1 : 1					
„ Au „ in $\text{H}_2\text{O}$ „ „ „ 1 : 3					
„ S „ im Gas „ „ „ 1 : 10					

alles Daten, die wieder den Zusammenhang mit Material, Teilchengröße und umgebendem Medium deutlich erkennen lassen. Z. B. ändert sich die Intensität der  $I_r$ -Komponente bei kleineren und größeren Schwefelpartikeln im Gas mit wachsendem Winkel  $\gamma$  sehr stark, während sich bei kleineren Gold- und Quecksilberpartikeln im Gas gar keine Intensitätsänderung ergibt.

Die Untersuchung über den Polychroismus bei Drehung des Analysators wurde bloß in der zum einfallenden Strahl normalen Visionsrichtung ( $\gamma = 90^\circ$ ) angestellt, weil dieser Fall am sichersten vom Experiment beherrscht wird (Dunkelfeldbeleuchtung) und daher zur Überprüfung der theoretischen Resultate dienen kann. Die Tab. Ib bis VIIb und Xb, XIb und die Kurven \*I bis \*VII, \*X, \*XI und \*\*I bis \*\*VII, \*\*X, \*\*XI<sup>2)</sup> geben auch Aufschluß über die verschiedene Farbe der unter verschiedenen festgewählten Winkeln  $\gamma$  resultierenden  $I_r$ - bzw.  $I_n$ -Komponente. Somit wird ein in einer bestimmten Richtung justierter Analysator beim Drehen um seine Achse in der einen Stellung nur die  $I_r$ -Komponente

1) Der Umstand, daß in Bogenlampenspektrum die Intensitäten verschiedener Wellenlängen ungleich verteilt sind, bewirkt nur insofern eine Änderung, als eine kleine Verschiebung gegen größere Wellenlängen eintritt, wie aus Tab. 4 ersichtlich ist.

2) M. A. Schirmann, l. c. im Anhang.

durchlassen, in der um  $\delta = 90^\circ$  gedrehten Stellung nur die  $I_{II}$ -Komponente und in Zwischenstellungen Bruchteile der beiden Komponenten, die von  $\sin^2 \delta$  und  $\cos^2 \delta$  abhängen. Die nebenan gezeichnete Fig. 12 stellt schematisch den Grundriß eines vertikal zur Zeichenebene justierten Analysators (Nicol) mit der Drehungsachse  $A$  und den Komponenten  $I_I \cos^2 \delta$  und  $I_{II} \sin^2 \delta$  bei Drehung um den Winkel  $\delta$  dar. Wie sich die Farben und Intensitäten für verschieden große Kügelchen verschiedenen Materials bei Drehung des speziell unter  $90^\circ$  justierten Analysators ändern, zeigen die Tab. Ib bis VIIb, XIb, XIIb.<sup>1)</sup>

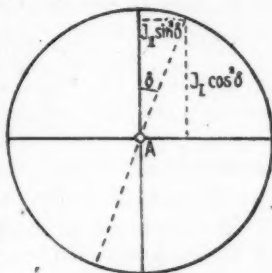


Fig. 12.

Die Intensitätskontraste sind zum Unterschied von den Farbenkontrasten beim Polychroismus bei Drehung des Analysators die umgekehrten, als beim Polychroismus bei Änderung der Visionsrichtung. Z. B. ändert sich bei großen Schwefelkügelchen im Gas die Intensität bei Drehung um  $\delta$  nur wenig, während bei kleinen Goldkügelchen im Gas große Unterschiede vorhanden sind, also entgegengesetzte Intensitätsübergänge als beim Polychroismus bei Änderung der Visionsrichtung. Diese Verhältnisse finden durch die Dispersion der Polarisation eine einfache Erklärung.

Zusammenfassend lassen sich die Einflüsse auf den Polychroismus des polarisierten abgelenkten Lichtes kugelförmiger Materieteilchen von Dimensionen, die mit der Lichtwellenlänge vergleichbar sind, folgendermaßen charakterisieren: Außer der Materialeigenschaft, die z. B. dem Hg und dem S einen stärkeren Polychroismus als dem Au zuschreibt, spielt einerseits die Kugelgröße eine Rolle, insofern als größere Partikel die Erscheinung deutlicher hervortreten lassen als kleinere, andererseits das Mittel, in dem die Kügelchen eingebettet sind und zwar so, daß optisch dichtere Medien den Polychroismus bestimmter Materieteilchen vergrößern. Ferner sind die zu beobachtenden Farben keine reinen Spektralfarben, sondern

1) M. A. Schirmann, l. c.

Mischfarben der in den betreffenden Richtungen verschieden intensiv gestrahlten Spektralfarben. Die Intensitäten dieser Mischfarben ändern sich — abgesehen vom erheblichen Einfluß des Materials — mehr oder weniger und zwar stets zur Verdeutlichung des polychroitischen Verhaltens mit Wachsen der Teilchengröße und optisch dichterem umgebenden Medium.

Die Art, wie sich der Farbenwechsel beim Polychroismus bei Änderung der Visionsrichtung vollzieht, ist die, daß *bei Drehung einer fixen Analysatorstellung von kleineren zu größeren Winkeln gegen den Einfallstrahl die Wellenlänge des resultierenden seitlich zerstreuten polarisierten Lichtes von größeren gegen kleinere Wellenlängen rückt.*

Ähnlich liegen die Farbenverhältnisse beim Polychroismus bei Drehung des Analysators, wenn der Analysator in einer ganz bestimmten Visionsrichtung um den Winkel  $\delta$  von  $0^\circ$  gegen  $90^\circ$  gedreht wird.

Es ist also der Polochroismus sowohl bei Änderung der Visionsrichtung, als auch bei Drehung des Analysators und einer eventuellen Kombination beider Arten eine mit der Dispersion der Polarisation in engstem Zusammenhang stehende Erscheinung.

#### **§ 7. Neue optische Methoden zur Größenbestimmung submikroskopischer Einselpartikel von Kugelform aus der Polarisation.**

Die Vermehrung der Zahl verschiedener voneinander unabhängiger Verfahren zur Größenbestimmung submikroskopischer Einzelteilchen von Kugelform scheint um so mehr wünschenswert, seitdem die exakte Größe solcher Partikel indirekt zur Messung kleinster Elektrizitätsladungen verwandt wird und somit zur Entscheidung der Frage einer Atomistik der Elektrizität beiträgt, ferner seitdem sie in jüngster Zeit bei der Messung der auf Partikel dieser Größenordnung ausgeübten photophoretischen Kraft eine maßgebende Rolle spielt.

Im folgenden seien nun zwei weitere optische Verfahren zur Größenbestimmung aus der *Polarisation* des seitlich zerstreuten Lichtes im Anschluß an die Miesche Beugungstheorie angegeben.

Das erste beruht, wie in einer 1916 erschienenen Abhandlung „Vorschlag einer optischen Methode zur Größenbestimmung

ultramikroskopischer Teilchen von Kugelform“ von F. Tank<sup>1)</sup> auseinandergesetzt wird, auf einer Analyse des von diesen Teilchen seitlich zerstreuten elliptisch polarisierten Lichtes bei einfallendem linear polarisiertem Licht. Es existiert nämlich

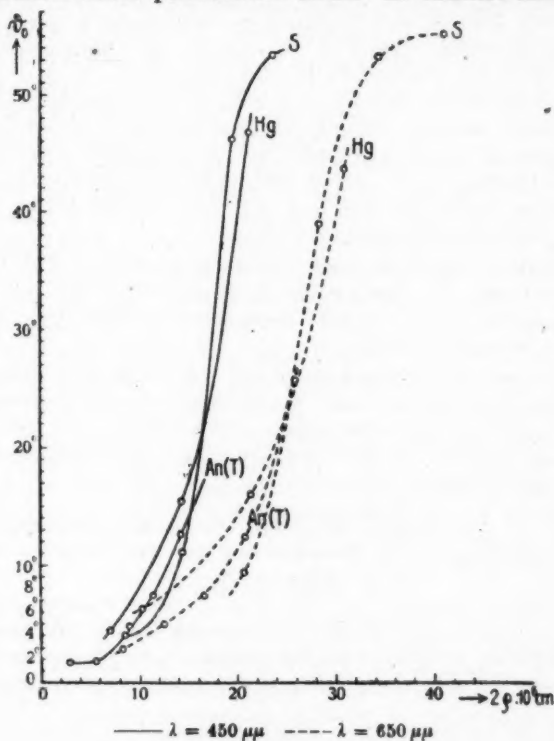


Fig. 18.

ein gegenseitiges Entsprechen der Partikelgröße und jenes Drehungswinkels ( $\theta_0$ ), um den man die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes drehen muß, um die z. B. durch ein Kalkspatrhomboider getrennten und durch ein Ultramikroskop beobachteten Beugungsbilder der Komponenten der von dem Kügelchen zerstreuten seitlichen Strahlung ( $J_\theta$  und  $J_\varphi$ ) in gleicher Helligkeit zu sehen.

1) F. Tank, Mitteil. d. Physik. Gesellsch. Zürich Nr. 18. 1916.



In vorstehender Fig. 13 sind diese Zusammenhänge durch Kurven veranschaulicht.

Das zweite Verfahren der Größenbestimmung aus der Polarisation beruht auf einfacheren Polarisationsverhältnissen, nämlich auf der Polarisation des seitlich zerstreuten Lichtes bei einfallendem unpolarisiertem Licht. Die Miesche Theorie der Polarisation läßt in allen Richtungen, die in den beiden Symmetrieebenen (Koordinatenebenen) liegen, welche den Einfallstrahl enthalten, linear polarisiertes Licht erwarten. Der prozentuale Gehalt an polarisiertem Licht  $P(\gamma)$  läßt sich in jeder Richtung, z. B. mittels Photopolarimeters, experimentell ermitteln. Die in den früheren Abbildungen (Figg. 2—12) enthaltenen theoretischen Polarisationskurven für Au, Hg und S-Partikeln bei bestimmten Wellenlängen zeigen, daß ihre Maxima für verschiedene Partikelgrößen unter verschiedenen Winkeln liegen. Es besteht somit ein eindeutiger Zusammenhang zwischen *Partikelgröße* und *Polarisationsmaximum* und zwar rückt dieses Maximum von dem Grenzwert unendlich kleiner Teilchenradien bei Metallteilchen von  $\gamma = 90^\circ$  stetig gegen  $\gamma = 120^\circ$ , bei dielektrischen Teilchen von  $\gamma = 90^\circ$  stetig gegen  $\gamma = 60^\circ$ . Daher ist es möglich, eine Größenbestimmung von Einzelteilchen, wahrscheinlich auch allgemein mit Unterscheidung des elektromagnetischen Charakters des Materials vorzunehmen.<sup>1)</sup>

#### § 8. Zusammenfassung.

In diesem Beitrag zur Optik kleiner mit der Wellenlänge des Lichtes vergleichbarer Kügelchen ist durch die Behandlung des Einzelteilchens dieser Größenordnung als polarisieren-

1) Im Anschluß an diese Größenbestimmungen aus der Polarisation sei noch ein auf der Basis der Polarisation fußender *experimenteller Beweis* für die *Kugelgestalt* kleiner im elektrischen Lichtbogen erzeugter Partikel angeführt. Bei den diesbezüglichen Versuchen (F. Tank, l. c.) wurde in einem Ultrakondensor, wie ihn E. Meyer und W. Gerlach Ann. d. Phys. 45. p. 177. 1914; 47. p. 227. 1915) verwandten, durch ein elektrisches Feld ein im Lichtbogen erzeugtes Teilchen schwebend erhalten, seitlich beleuchtet und senkrecht dazu beobachtet. In zwei Richtungen, in denen nach der Theorie der Polarisation für Kügelchen die Strahlung linear polarisiert sein soll, konnte sie auch tatsächlich durch ein Nicolisches Prisma vollständig ausgelöscht werden. Für andere als kugelförmige Objekte wäre dies im allgemeinen nicht der Fall.

des Objekt eine exakte Methode zur Erfassung des Polarisationsproblems gegeben, um den bei kolloidalen Lösungen resultierenden Gesamteffekt in Einzelwirkungen aufzulösen. Denn alle bisherigen Polarisationsuntersuchungen, die sich stets nur auf Suspensionen solcher Partikel beziehen, beurteilten bloß einen summarischen Effekt, der von sehr vielen, niemals gleich großen Teilchen herrührt, so daß ihre Resultate nur statistische Mittelwerte von Größen sind, durch die verschiedene sich überlagernde Einzelphänomene beschrieben werden.

Der erste Teil der Polarisationsuntersuchungen am Einzelteilchen hat daher den Zweck, durch erweiterte Anwendung der strengen optischen (elektromagnetischen) Beugungstheorie für kleine Kugeln unter besonderer Berücksichtigung des Kugel- und Umhüllungsmaterials (gasförmig oder flüssig), der Teilchengröße und Wellenlänge der einfallenden Strahlung a) für *Metalle*, b) für *Dielektrika*:

1. Die verschiedene Deutung der bisherigen experimentellen Polarisationsergebnisse an kolloidalen Lösungen unter einen Gesichtspunkt zu bringen,

2. neue Erkenntnisse über Farbenphänomene des von Einzelteilchen zerstreuten, polarisierten Lichtes aus dem Bereich der Theorie zu schöpfen, um in einem folgenden zweiten Teil dieser Arbeit die theoretisch resultierenden Effekte in qualitativer Hinsicht einer experimentellen Prüfung zu unterziehen.

Bei der numerischen Berechnung der Polarisation muß der komplexe Brechungsexponent des Kugelmateri als, der Brechungsindex des umgebenden Mediums, der Radius des Kugelchens und die Wellenlänge der einfallenden Strahlung einzeln variiert werden.

Die Betrachtung der Wellenlänge  $\lambda$  des einfallenden Strahls als Veränderliche zeigt, daß die Kügelchen das abgebeugte Licht nicht bloß unter verschiedenen Winkeln ( $\gamma$ ) gegen den einfallenden Strahl verschieden stark polarisieren, sondern daß die Lage des Polarisationsmaximums selbst eine Funktion der Wellenlänge ist. (Dispersion der Polarisation.) Der Charakter dieser Funktion wird durch das Teilchenmaterial bestimmt und die diesbezügliche Untersuchung ergibt:

1. Die Polarisationsmaxima bzw. Minima liegen bei bestimmter Partikelgröße und verschiedenen Wellenlängen des Lichtes so, daß die Winkel maximaler Polarisation der senk-

recht und in der Visionsebene schwingenden Komponente  $\gamma_{P_{\max}}$  bzw.  $\gamma_{P_{\min}}$  der dazugehörigen Wellenlänge, bei Metallkügelchen invers, bei dielektrischen Kügelchen direkt proportional sind und bei Metallkügelchen das Intervall zwischen  $\gamma = 90^\circ$  und einem bestimmten  $\gamma > 90^\circ$ , bei dielektrischen Kügelchen das Intervall zwischen  $\gamma = 90^\circ$  und einem bestimmten  $\gamma < 90^\circ$  erfüllen.

Die Betrachtung des Partikelradius als Veränderliche zeigt bei einfallendem monochromatischen Licht für verschiedenes Material eine Abhängigkeit des Winkels maximaler Polarisation von der Teilchengröße und ergibt:

2. Bei Partikel verschiedener Größe und einfallendem monochromatischen Licht verschiebt sich mit Wachsen der Teilchengröße die Lage des Winkels der maximalen Polarisation für die senkrecht und in der Visionsebene schwingende Komponente  $\gamma_{P_{\max}}$  bzw.  $\gamma_{P_{\min}}$  bei Metallkügelchen nach der Seite größerer, bei dielektrischen Kügelchen nach der Seite kleinerer Winkel, wobei die Maxima bzw. Minima bei Metallkügelchen das Intervall zwischen  $\gamma = 90^\circ$  und einem bestimmten  $\gamma > 90^\circ$ , bei dielektrischen Kügelchen das Intervall zwischen  $\gamma = 90^\circ$  und einem bestimmten  $\gamma < 90^\circ$  erfüllen.

Durch Kombination der Verschiebung des Maximums der Polarisation einerseits mit variabler Wellenlänge, andererseits mit variablem Partikelradius folgt bei einfallendem weißen Licht unter Berücksichtigung der Farbe der seitlichen Ausstrahlung:

3. Das Polarisationsmaximum größerer Teilchen wird bei einfallendem weißen Licht wegen der seitlichen Ausstrahlung längerer Wellen bei Metallkügelchen — trotz der kleinen Verschiebung gegen größere Winkel — doch bei kleineren Winkeln, bei dielektrischen Kügelchen — trotz der kleinen Verschiebung gegen kleinere Winkel — doch bei größeren Winkeln liegen, wie es den Polarisationskurven für größere Wellenlängen entspricht und umgekehrt für kleinere Teilchen, die kürzere Wellen seitlich zerstreuen; denn für die Lage des Polarisationsmaximums ist die den Partikelgrößen entsprechende Verschiebung gegenüber der den Wellenlängen entsprechenden nur von geringer Bedeutung.

Die Berechnung der senkrecht und in der Visionsebene schwingenden Komponenten des seitlich zerstreuten Lichtes

$$I_{\perp} = \frac{e^2}{\lambda^2} \mathfrak{S}_{\perp} \quad \text{und} \quad I_{\parallel} = \frac{e^2}{\lambda^2} \mathfrak{S}_{\parallel}$$

(die also nicht mehr bloß auf eine Wellenlänge und eine Partikelgröße beschränkt und deshalb unter den verschiedensten Bedingungen vergleichbar sind) als Funktion des Winkels  $\gamma$  gegen den einfallenden Strahl für bestimmte Partikelgrößen und verschiedene Wellenlängen gestattet einen Rückschluß zu ziehen:

a) Auf die Farbe der senkrecht zur Visionsebene schwingenden Komponente unter verschiedenen Winkeln gegen den Einfallsstrahl.

b) Auf die resultierende Farbe der von einem in bestimmter Visionsrichtung ( $\gamma$ ) justierten Analysator durchgelassenen Bruchteile der  $I_{\perp}$ - und  $I_{\parallel}$ -Komponente bei Drehung um seine Achse (Drehungswinkel  $\delta$ ).

4. In beiden Fällen ergibt sich mit Wachsen des Winkels  $\gamma$  (bzw.  $\delta$ ) ein allmählicher Übergang von längeren Wellen schwächerer (stärkerer) Intensität zu kürzeren Wellen stärkerer (schwächerer) Intensität, wobei die ausgesandten Farben keine reine Spektralfarben, sondern Mischfarben der in diesen Richtungen ausgestrahlten Spektralfarben sind.

5. Unter Polychroismus bei Änderung der Visionsrichtung soll der allmähliche Übergang der senkrecht zur Visionsebene schwingenden Komponente des seitlich zerstreuten Lichtes von längeren Wellen schwächerer Intensität zu kürzeren Wellen stärkerer Intensität bei Variation der Visionsrichtung von  $\gamma = 0^\circ$  aus gegen den Einfallsstrahl verstanden werden.

6. Unter Polychroismus bei Drehung des Analysators soll der Farbenwechsel von längeren Wellen stärkerer Intensität zu kürzeren Wellen schwächerer Intensität bei Drehung eines in bestimmter Visionsrichtung justierten Analysators von  $\delta = 0^\circ$  aus auf Grund der verschiedenen resultierenden Farben der senkrecht und in der Visionsebene schwingenden Komponenten des seitlich zerstreuten Lichtes verstanden werden.

Die Untersuchung hat ergeben, daß der Polychroismus des zerstreuten polarisierten Lichtes eine Erscheinung ist, die mit der Kugelgestalt des polarisierenden Teilchens vereinbar ist und auf die Dispersion des abgelenkten polarisierten Lichtes zurückgeführt werden kann.

7. Die aus den erweiterten Polarisationsformeln errechneten theoretischen Polarisationsresultate für das Dielektrikum stimmen in jeder Hinsicht qualitativ mit den Polarisationsbeobachtungen an trüben Medien von Arago, Tyndall, Pernter und Ehrenhaft überein.

Arago, der die Polarisation des Himmelslichtes entdeckt hat, konnte schon bei seinen ersten Beobachtungen außer einem Gebiet positiver Polarisation auch ein solches negativer Polarisation und einen sogenannten neutralen Punkt ( $\text{Pol} = 0$ ) finden. (In der Theorie: Gebiete negativer Polarisation und neutralen Punkt bei Dielektriciis.)

Tyndall hat auf Grund einer Reihe von Versuchen an trüben Medien nachgewiesen, daß die Maxima der Polarisation der einzelnen Spektralfarben von der Teilchengröße abhängen dürften, indem er bei größeren suspendierten Teilchen eine Verschiebung der Maxima von  $90^\circ$  gegen die Lichtquelle konstatierte. (In der Theorie: Verschiebung des Polarisationsmaximums dielektrischer Teilchen bei monochromatischen Licht mit Wachsen der Teilchengröße nach kleineren Winkeln gegen den Einfallsstrahl.)

Pernter hat bei stark konzentrierten Mastixsuspensionen festgestellt, daß das Maximum der Polarisation für rotes Licht noch bei  $90^\circ$ , für grünes und violettes Licht jedoch um  $7^\circ$  davon entfernt war. (In der Theorie: Dispersion der maximalen Polarisation.)

Ehrenhaft hat durch Untersuchungen am Arsensulfid den Prozentgehalt an polarisiertem Licht in Abhängigkeit von der Farbe des einfallenden Lichtes gefunden. (In der Theorie: Ähnlicher Zusammenhang des Polarisationsgrades mit der Wellenlänge des einfallenden Lichtes bei Dielektriciis.)

8. Die Unstimmigkeiten betreffend die Lage des Polarisationsmaximums ( $90^\circ$  oder  $120^\circ$  gegen die Richtung der Einfallsstrahlen) bzw. die Verschiebung dieses Maximums mit Wachsen der Partikelgröße (von  $90^\circ$  gegen  $120^\circ$  oder von  $120^\circ$  gegen  $90^\circ$ ) in wässrigen Metallösungen (speziell der Au-Lösungen) sind unter Berücksichtigung der Partikeldimension und der Zusammensetzung des einfallenden Lichtes auf Grund der Theorie der Dispersion (und des Polyehroismus) des seitlich zerstreuten polarisierten Lichtes vollständig geklärt.

Denn die Versuchsbedingungen der einzelnen Autoren (Threlfall, Ehrenhaft, Müller und Steubing), welche kolloidale Metallösungen untersucht haben, waren sowohl in bezug auf Herstellungsart der Suspension als auch Beleuchtungsart verschiedene. Die mechanische (Zerstäubung feiner Metalldrähte im elektrischen Lichtbogen) bzw. chemische (Einwirkung geeigneter Reduktionsmittel auf Verbindungen der betreffenden Metalle) Erzeugung der kolloidalen Lösung hat einen Einfluß auf die Partikelgröße, die Beleuchtungsart auf die Zusammensetzung des einfallenden Lichtes (monochromatisch oder weiß bzw. eine Mischfarbe). Diese beiden wichtigen Umstände der Versuchsbedingungen genannter Autoren klären auf Grund der in vorliegender Abhandlung entwickelten theoretischen Ergebnisse die bisherigen Unstimmigkeiten vollständig.

9. Es wird eine neue optische Methode zur Größenbestimmung submikroskopischer Einzelpartikel von Kugelform aus der Polarisation vorgeschlagen.

§ 9. Tabelle des Koeffizienten  $a$ , und  $p$ , von Au im Gas.

$\lambda$ in $\mu\mu$	$a_1$	$a_2$	$p_1$	$2\rho \cdot 10^6 \text{ cm}$
500	0,055 - 0,460 i	0,124 - 0,134 i	0,100 + 0,062 i	20,7
550	0,090 - 0,800 i	0,178 - 0,078 i	0,150 + 0,047 i	
600	0,307 - 0,947 i	0,153 - 0,033 i	0,133 + 0,029 i	
650	0,575 - 0,997 i	0,105 - 0,009 i	0,155 + 0,027 i	
500	0,106 - 0,740 i	0,108 - 0,074 i	0,093 + 0,055 i	16,8
550	0,265 - 1,050 i	0,120 - 0,034 i	0,185 + 0,056 i	
600	0,620 - 0,895 i	0,098 - 0,020 i	0,118 + 0,023 i	
650	0,890 - 1,035 i	0,055 - 0,004 i	0,146 + 0,021 i	

Wien, I. Phys. Inst. d. Universität.

(Eingegangen 30. Januar 1919.)

## 2. Zur Theorie der Turbulenz; von Ludwig Hopf.

### § 1. Gedankengang.

Der bei jeder Art von Flüssigkeitsströmung beobachtete Übergang aus dem laminaren in den turbulenten Zustand, wenn gewisse Mindestwerte der Abmessungen oder der Geschwindigkeit überschritten werden, ist noch immer nicht theoretisch geklärt. Osborne Reynolds<sup>1)</sup> hat experimentell gezeigt, was auch aus Dimensionsbetrachtungen folgt, daß es hierbei nur auf die „Reynoldssche Zahl“  $R$  ankommt, welche aus der Dichte  $\rho$ , dem Reibungskoeffizienten  $\mu$  der Flüssigkeit, der Geschwindigkeit  $u$  und einer Längenabmessung  $l$  der Strömung gebildet wird durch die Beziehung

$$(1) \quad R = \frac{\rho U l}{\mu}.$$

Unterhalb einer kritischen Zahl  $R_k$  bildet sich eine laminäre Strömung aus, die vollständig durch die innere Reibung geregelt wird und in den gewöhnlichen Fällen der mathematischen Analyse leicht zugänglich ist; oberhalb  $R_k$  tritt die turbulente Strömung ein, deren Gesetzmäßigkeiten weder physikalisch noch mathematisch erfaßt sind. Der plötzliche Übergang bei der kritischen Reynoldsschen Zahl hat zu der Auffassung geführt, daß die laminare Strömung für alle kleineren Werte von  $R$  stabil, für alle größeren instabil sei; doch ist es noch nicht gelungen, diese Auffassung aus der Theorie der reibenden Flüssigkeiten zu beweisen.

In einer früheren Arbeit habe ich<sup>2)</sup> im Anschluß an Sommerfeld<sup>3)</sup> die *Methode der kleinen Schwingungen* für dieses Problem durchgeführt, gelangte aber nicht zu dem

1) O. Reynolds, Scientific papers II, p. 51, 153 u. 524.

2) L. Hopf, Ann. d. Phys. 43. p. 1. 1914.

3) A. Sommerfeld, Atti del IV. congresso intern. dei Matematici 1908.



gesuchten Ergebnis, sondern kam auf absolute Stabilität der laminaren Bewegung bei jeder Reynoldsschen Zahl.<sup>1)</sup> Dabei war, wie bei den meisten neueren Arbeiten über das Turbulenzproblem, als Grundströmung die Strömung zwischen einer ruhenden und einer bewegten Wand angenommen, bei welcher die Geschwindigkeitsverteilung normal zur Strömungsrichtung ein lineares Gesetz befolgt. Die folgende Arbeit soll eine Möglichkeit zeigen, dieses im Hinblick auf die Erfahrung sehr unbefriedigende Ergebnis durch weitere Fassung der möglichen Störungen zu überholen; ich muß mich daher hier sehr eng an die frühere Arbeit anschließen und werde mich in allen physikalischen und mathematischen Einzelheiten, die dort besprochen sind, sehr kurz fassen.

Das Hauptergebnis, an welches hier logisch angeknüpft werden soll, ist die dort gegebene Beschreibung des Stromlinienverlaufs. Aus einem System von Schwingungen der ruhenden Flüssigkeit, welches aus einer Grundschwingung der ganzen Strömung und unendlich vielen Oberschwingungen der unterteilten Strömung besteht, wird mit wachsender Reynoldsscher Zahl schließlich ein System, bei welchem die einzelnen — verschieden stark gedämpften, in der Phase voneinander unabhängigen — Partialschwingungen sich mehr und mehr auf einzelne Strömungsschichten konzentrieren. Hierbei wird das Verhalten reibungsloser Flüssigkeiten so angenähert, daß das Strömungsbild für  $R = \infty$  genau mit dem Strömungsbild für  $\mu = 0$  übereinstimmt. Dies ist nicht etwa selbstverständlich; denn die Strömung einer reibenden Flüssigkeit unterscheidet sich von der Strömung einer reibungslosen Flüssigkeit grundsätzlich durch das Verhalten an festen Wänden, an welchen bei Berücksichtigung der Reibung kein Gleiten stattfinden darf. Der Einfluß dieser beschränkenden Bedingung konzentriert sich aber, wie die Rechnung zeigt, mit wachsendem  $R$  mehr und mehr in die unmittelbare Nähe der Wand. Von der Dämpfung der Schwingungen gilt nicht dasselbe wie von den Stromlinien, die Dämpfung wird mit wachsendem  $R$  nicht geringer, sondern wächst an. Die Schwingungen der reibungslosen Flüssigkeit sind dabei in dem behandelten Fall ganz indifferent, zeigen keine Tendenz zum Anwachsen.

1) Dasselbe Ergebnis bei R. von Mises, Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung 20. Heft 10.

Dieses Verhalten legt die Ansicht nahe, daß keine Instabilität einer reibenden Strömung bei großem  $R$  zu erwarten sein kann, wenn die reibungslose Strömung keine Neigung zur Instabilität zeigt, daß aber eine solche Neigung, wenn vorhanden, wohl instande sein kann, der Dämpfung durch die Reibung entgegen zu arbeiten, da die Stromlinien der Störung in der reibenden Flüssigkeit dieselbe Gestalt zeigen wie in der reibungslosen. Nun gibt es aber nach den Untersuchungen von Lord Rayleigh<sup>1)</sup> tatsächlich derartige Instabilitätserscheinungen in der Theorie der reibungslosen Flüssigkeiten. Einesteils gibt es Hauptströmungen, welche Instabilität zeigen; doch gehören dazu alle diejenigen nicht, bei welchen  $d^2U/dy^2$  ( $U$  Hauptgeschwindigkeit,  $y$  Abmessung normal zur Hauptströmungsrichtung) sein Vorzeichen nicht wechselt. Deshalb sieht es zunächst nicht so aus, als ob diese Instabilitätserscheinungen mit dem Turbulenzproblem etwas zu tun hätten; man könnte sich höchstens auf den Standpunkt stellen, daß solche instabile Strömungen endliche Abweichungen von den normalen laminaren Strömungen darstellen, und so eine Brücke finden zu den für einzelne Fälle durchgeführten Berechnungen von Noether.<sup>2)</sup>

Andernteils zeigen aber die reibungslosen Flüssigkeiten bei jeder beliebigen Hauptströmung Instabilität, wenn gewisse *Grenzbedingungen* erfüllt sein sollen, und von hier scheint mir ein gangbarer Weg zum Turbulenzproblem auszugehen. Bei der früheren Untersuchung war es wesentlich, daß die Störung an den Wänden verschwinden mußte, daß sie also dieselben Grenzbedingungen erfüllen mußte wie die Hauptströmung. Darin liegt meines Erachtens eine Beschränkung; wohl kann man sich denken, daß eine im Innern der Flüssigkeit entstehende Störung an den Wänden ihre Grenze findet, aber auf der andern Seite werden gerade *an den Wänden Störungen entstehen*. Wenn die Wand erschüttert wird, wird die Störung gerade an der Wand am größten sein; man kann bei Betrachtung einer derartigen Störung ohne weiteres unendlich kleine Bewegungen der Wand zulassen und den ersten Augenblick der Störung, ihre Neigung zum Abnehmen oder Anwachsen verfolgen, wobei

1) Lord Rayleigh, Scientific papers 1. p. 474; 3. p. 575 u. 594; 4. p. 203.

2) F. Noether, Jahresberichte der deutschen Math.-Ver. 23. p. 138. 1914 u. Nachrichten der Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1917.

immer noch nicht die Störung an der Wand verschwinden muß. Alle Erscheinungen bei reibenden Flüssigkeiten werden ja wesentlich durch das Verhalten in den unmittelbar an der Wand befindlichen Schichten bestimmt. Auch die Beschaffenheit der Wand hat erfahrungsgemäß einen großen Einfluß auf die turbulente Strömung, sowohl auf die Art, wie sie sich ausbildet, als auch auf die kritische Reynoldssche Zahl. Wände von verschiedener „Rauhigkeit“ begünstigen in verschiedener Weise die Ausbildung von Störungen am Rande und zeigen auch verschiedene kritische Zahlen und verschiedene Widerstandskoeffizienten der turbulenten Strömung. All dies legt es nahe, den festen Wänden auch bei der Entstehung der Turbulenz eine größere Rolle zuzuweisen, als es im früheren Ansatz geschehen ist, und insbesondere die von der Wand ausgehenden Störungen zu untersuchen.

Nun ist es aber nicht eindeutig, in welcher Weise eine solche Störung anzusetzen ist, welche Grenzbedingungen also an den festen Wänden vorzuschreiben sind. Bei einer Wanderschütterung oder einer starken Störung der äußersten Schicht durch Rauhigkeit oder Veränderung der Wandbeschaffenheit wird es auf die Wandbeschaffenheit sehr ankommen, so daß eine die Wand beschreibende Konstante in die Rechnung eingehe. In dieser Gestalt ist das Problem nicht angreifbar. Wir können aber den früher diskutierten Fall als einen Grenzfall ansehen und dazu den entgegengesetzten Fall konstruieren. Früher hatten wir eine Wand, welche jeder Störung unendlichen Widerstand bot; an der Wand mußte die Störung Null sein. Der entgegengesetzte *Grenzfall* wäre eine Wand, die der Störung gar nicht widersteht, also eine Art *freier Oberfläche*; an einer solchen Wand ist die Störung nicht Null, der von der Störung erzeugte *Druck verschwindet* aber. Diese Grenzbedingung führt in der Tat bei reibungslosen Flüssigkeiten zur Instabilität; es ist daher zu erwarten, daß sie auch bei reibenden Flüssigkeiten mit großem  $R$  eine solche Instabilität zeigt, während das Verhalten bei kleinem  $R$  ein ganz anderes sein muß. Die Durchführung ergibt wirklich eine kritische Reynoldssche Zahl, und zwar eine kleinere als beobachtet wurde. Dies entspricht durchaus dem Charakter des Ansatzes, der einen Grenzfall der Wirklichkeit darstellen soll. Der frühere Grenzfall ergab zu große Stabilität ( $R_k = \infty$ ), die

folgende Diskussion des anderen Grenzfalles zu kleine Stabilität ( $R_k = 11$ ). Zwischen beiden liegt die Wirklichkeit, welche nur durch einen weiteren Parameter vollständig charakterisiert werden kann. Gewöhnlich wird  $R_k = 1000$  beobachtet; aber Ekman<sup>1)</sup> hat gezeigt, daß man bei vorsichtigem Experimentieren zu weit höheren Werten gelangen kann. Ruckes<sup>2)</sup> hat in Metallröhren  $R_k \sim 400$  gefunden. Der Zusammenschluß der beiden Grenzfälle in einer Grenzbedingung mit einer Materialkonstante könnte erst versucht werden, wenn das Dimensionsgesetz bekannt wäre, welches den Einfluß der Wandbeschaffenheit beherrscht.

## § 2. Mathematische Formulierung.

Die Hauptströmung, deren Stabilität wir untersuchen wollen, sei wieder die einfachste: nämlich die Strömung zwischen 2 Platten im Abstand  $h$  voneinander, deren eine mit der Geschwindigkeit  $U$  längs der  $x$ -Achse bewegt wird; die Geschwindigkeitsverteilung verläuft nach dem Gesetz  $Uy/h$  (Fig. 1).

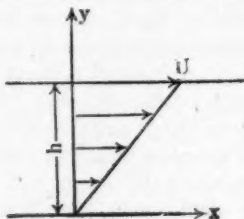


Fig. 1.

Auf diese Strömung überlagere sich eine Störung mit den Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  längs der  $x$ - und  $y$ -Achse. Wir führen für  $x$ ,  $y$  und die Zeit  $t$  dimensionslose Größen ein durch die Beziehungen

$$(2) \quad \xi = \frac{x}{h}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \tau = \frac{U}{h} t.$$

Die Abhängigkeit der Störung von der  $x$ -Richtung und von der Zeit sei dargestellt durch den Faktor  $e^{i(\beta\xi - \alpha\tau)}$ . Die räumliche Frequenz  $\alpha$  wird dabei als reelle, bekannte Größe betrachtet;  $\beta$  ist die Unbekannte, welche aus der Differentialgleichung und den Grenzbedingungen folgt, und welche den zeitlichen Verlauf bestimmt. Die Kontinuitätsgleichung führt dann zu dem Ansatz

$$(3) \quad u = \frac{1}{h} \frac{df}{d\eta} e^{i(\beta\xi - \alpha\tau)}, \quad v = \frac{i\alpha}{h} f e^{i(\beta\xi - \alpha\tau)}.$$

1) V. W. Ekman, Arkiv för matematik, astronomi och fysik 6. Nr. 12.

2) W. Ruckes, Ann. d. Phys. 25. p. 983. 1908.

Die Funktion  $f$  wird aus der Differentialgleichung bestimmt; die Grenzbedingungen lassen eine Lösung nur bei bestimmten Werten von  $\beta$  zu, welche Wurzeln einer transzendenten Gleichung sind.

Zunächst behandeln wir den Fall einer *reibungslosen Flüssigkeit*: Die hydrodynamischen Differentialgleichungen ergeben bei Elimination des Druckes

$$(4) \quad (\beta - \alpha \eta) \left( \frac{d^2 f}{d\eta^2} - \alpha^2 f \right) = 0.$$

Die erste Klammer führt auf die Lösungen  $\beta = \alpha \eta$ , d. h. auf Schwingungen, die auf eine unendlich schmale Schicht  $\eta$  konzentriert sind. Auf die Rolle, die diese Schwingungen in der früheren Arbeit spielten, wurde in der Einleitung schon hingewiesen. Die Lösung der 2. Klammer lautet:

$$(5) \quad f = A \sin \alpha \eta + B \cos \alpha \eta.$$

Nun soll der Druck an den beiden Berandungen  $\eta = 0$  und  $\eta = 1$  verschwinden. Der Druck sei in der Form angesetzt:

$$p = b e^{i(\beta \tau - \alpha t)}.$$

Dann hängt  $b$  mit  $f$  zusammen durch die Beziehung:

$$(6) \quad b = \frac{\rho U}{\alpha h} \left\{ (\beta - \alpha \eta) \frac{df}{d\eta} + \alpha f \right\}.$$

Die Grenzbedingungen führen zu den Gleichungen:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} A\beta + B = 0 \\ A\{(\beta - \alpha)\cos \alpha + \sin \alpha\} + B\{(\beta - \alpha)\sin \alpha + \cos \alpha\} = 0. \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen sind nur verträglich, wenn

$$(8) \quad \begin{aligned} \beta^2 - \alpha\beta + \alpha \cotg \alpha - 1 &= 0 \\ \beta &= \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha \cotg \alpha}. \end{aligned}$$

Ist  $\alpha$  groß, also die Wellenlänge der Störung klein, so ist  $\beta$  rein reell (Fig. 2), die Störung verhält sich indifferent; ist aber  $\alpha < 2,4$ , so ist der Radikant der Wurzel negativ,  $\beta$  komplex; dies bedeutet eine mit der Zeit abnehmende und eine anwachsende Schwingung, also ist die *Hauptströmung instabil gegen jede Störung, die zu einem  $\alpha < 2,4$  gehört.*

Bemerkenswert ist, daß  $\beta$  gar nicht mehr von  $U$  abhängt; aus der Differentialgleichung und aus den Grenzbedingungen hat sich  $U$  weggehoben. Für  $U = 0$  wird zwar das logarithmische Doremment der Schwingung Null, da es proportional  $\beta U$  ist; trotzdem ist der Übergang von der erhaltenen Lösung zum Fall der ruhenden Flüssigkeit sinnlos. Man kann sich leicht überzeugen, daß die Differentialgleichung zwar dieselbe bleibt, aber der Druck nur durch das Glied  $\beta \frac{df}{d\eta}$  gegeben ist, und das ganze Problem für diesen Fall nur die Lösungen  $\beta = a \eta$  hat. Bei reibungslosen Flüssigkeiten besteht also ein

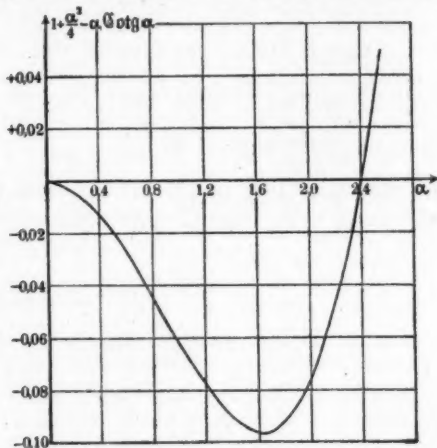


Fig. 2.

Sprung zwischen dem Fall der Ruhe und dem Fall endlicher Bewegung. Nun entspricht jede Bewegung reibungsloser Flüssigkeiten einer unendlich großen Reynoldsschen Zahl; jede endliche Reynoldssche Zahl gehört zum Falle  $U = 0$ , bei welchem die Instabilität nicht mehr vorhanden ist. Man kann also vielleicht sagen, daß auch die reibungslosen Flüssigkeiten eine gewisse kritische Zahl aufweisen, aber in der Form  $0/0$ , die erst durch die Theorie der reibenden Flüssigkeiten ausgerechnet werden kann.

Der Sprung bei  $U = 0$  existiert in der Theorie der reibenden Flüssigkeiten in der Tat nicht; sowohl Differentialgleichung wie Grenzbedingungen hängen von  $R$  so ab, daß sie den Fall



der Ruhe in stetiger Weise mit umfassen. Das ganze System von Schwingungen wandelt sich aus seiner Form bei ruhender Flüssigkeit mit wachsendem  $R$  nach und nach zu der Form, welche der reibungslosen Flüssigkeit entspricht.

Für reibende Flüssigkeiten sind die Differentialgleichungen zu erfüllen:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{d^2 f}{d\eta^2} - \alpha^2 f = \varphi \\ \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} - \alpha^2 \varphi = iR(\beta - \alpha\eta)\varphi \end{cases}$$

Der Normaldruck auf die Wand erscheint in der Form

$$-p_n = p - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = b_n \cdot e^{i(\beta\tau - \alpha\xi)}.$$

Aus den hydrodynamischen Differentialgleichungen folgt

$$\frac{i\alpha}{\varrho h} b = \frac{i\beta}{h} \frac{U}{h} \frac{df}{d\eta} - U \frac{i\alpha\eta}{h^2} \frac{df}{d\eta} + \frac{i\alpha}{h} \frac{U}{h} f - \frac{\mu}{\varrho h^2} \left( \frac{d^2}{d\eta^2} - \alpha^2 \right) \frac{df}{d\eta}$$

und daraus, wenn man noch die Beziehung (9) benutzt:

$$(10) \quad -\frac{\alpha h^2}{\mu} b_n = R(\beta - \alpha\eta) \frac{df}{d\eta} + \alpha R f + i \frac{d\varphi}{d\eta} - 2i\alpha^2 \frac{df}{d\eta}.$$

Dieser Ausdruck soll für  $\eta = 0$  und  $\eta = 1$  verschwinden; damit ist aber das Problem noch nicht vollständig bestimmt; bei reibenden Flüssigkeiten sind ja 2 Grenzbedingungen an jeder Wand zu erfüllen. Die andere Grenzbedingung behalten wir der Einfachheit halber bei wie früher; wir fordern, daß an der Wand kein Gleiten stattfindet, also  $df/d\eta = 0$  ist. Dann bleiben also an den beiden Wänden  $\eta = 0$  und  $\eta = 1$  die Grenzbedingungen zu erfüllen.

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{df}{d\eta} = 0 \\ \text{und} \\ F = f + \frac{i}{\alpha R} \frac{d\varphi}{d\eta} = 0 \end{cases}$$

Es empfiehlt sich meistens die Gleichungen in eine einfachere Gestalt zu bringen durch Einführung der Variablen

$$(12) \quad z = \frac{\alpha^2 + iR(\beta - \alpha\eta)}{(\alpha R)^{1/2}},$$

$z_0$  soll zu  $\eta = 0$ ,  $z_1$  zu  $\eta = 1$  gehören; ferner sei

$$(13) \quad x = \frac{\alpha}{(\alpha R)^{1/2}}.$$



Dann werden die Differentialgleichungen:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 f}{dz^2} + x^2 f = -\frac{1}{(\alpha R)^{1/2}} \varphi \\ \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + z \varphi = 0 \end{array} \right.$$

und die Grenzbedingungen für  $z = z_0$  und  $z = z_1$

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{df}{dz} = 0 \\ \text{und} \\ F = f + \frac{1}{(\alpha R)^{1/2}} \frac{d\varphi}{dz} = 0. \end{array} \right.$$

### § 3. Aufstellung der transzendenten Gleichung.

Die Gleichungen (9) haben die einfachen partikulären Lösungen

$$\cos \alpha \eta \quad \text{und} \quad \sin \alpha \eta ;$$

die beiden anderen Lösungen, die sich in geschlossener Form mit Hilfe von Zylinderfunktionen anschreiben lassen, seien  $f_1$  und  $f_2$ . Die 4 Grenzbedingungen würden eine 4reihige Determinante ergeben; wir gehen einfacher vor und wählen 2 Partikularlösungen, welche die beiden Grenzbedingungen  $df/d\eta = 0$  an den beiden Wänden von selbst erfüllen. Dies leisten die beiden Funktionen

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{1,2} = f_{1,2} - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{df_{1,2}}{d\eta} \right)_0 \sin \alpha \eta - \frac{1}{\alpha \sin \alpha} \left\{ \left( \frac{df_{1,2}}{d\eta} \right)_1 \right. \\ \left. - \left( \frac{df_{1,2}}{d\eta} \right)_0 \cos \alpha \right\} \cos \alpha \eta . \end{array} \right.$$

Führen wir weiterhin die Abkürzung ein:

$$(17) \quad F_{1,2} = f_{1,2} + \frac{i}{\alpha R} \frac{d\varphi_{1,2}}{d\eta} ,$$

so führen die beiden noch zu erfüllenden Grenzbedingungen

$$F^*(0) = 0 \quad \text{und} \quad F^*(1) = 0$$

zu der transzendenten Gleichung für die Unbekannte  $\beta$ :

$$(18) \quad F_1^*(0) \cdot F_2^*(1) - F_2^*(0) \cdot F_1^*(1) = 0 .$$

Nun folgt aus (16) und (17) mit Benützung der Abkürzungen (11) und (18):

$$(19) \begin{cases} \sin \alpha \cdot F_{1,2}(0) = F_{1,2}(0) \sin \alpha + \frac{1}{\alpha} \left( \frac{df_{1,2}}{d\eta} \right)_0 \cos \alpha - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{df_{1,2}}{d\eta} \right)_1 \\ \sin \alpha \cdot F_{1,2}(1) = F_{1,2}(1) \sin \alpha + \frac{1}{\alpha} \left( \frac{df_{1,2}}{d\eta} \right)_0 - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{df_{1,2}}{d\eta} \right)_1 \cos \alpha. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke, in (18) eingesetzt, führen zu der transzendenten Gleichung

$$(20) \begin{cases} \Delta = \left[ \{F_1(0)F_2(1) - F_2(0)F_1(1)\} - \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \left( \frac{df_1}{d\eta} \right)_0 \left( \frac{df_2}{d\eta} \right)_1 - \left( \frac{df_2}{d\eta} \right)_0 \left( \frac{df_1}{d\eta} \right)_1 \right\} \right] \sin \alpha \\ - \frac{1}{\alpha} \left[ \left\{ F_1(0) \left( \frac{df_2}{d\eta} \right)_1 - F_2(1) \left( \frac{df_1}{d\eta} \right)_0 \right\} - \left\{ F_2(0) \left( \frac{df_1}{d\eta} \right)_1 - F_1(1) \left( \frac{df_2}{d\eta} \right)_0 \right\} \right] \cos \alpha \\ + \frac{1}{\alpha} \left[ \left\{ F_1(0) \left( \frac{df_2}{d\eta} \right)_0 - F_2(1) \left( \frac{df_1}{d\eta} \right)_1 \right\} - \left\{ F_2(0) \left( \frac{df_1}{d\eta} \right)_0 - F_1(1) \left( \frac{df_2}{d\eta} \right)_1 \right\} \right] = 0. \end{cases}$$

Bei Benutzung der Variablen  $z$  nach (12) lautet die Gleichung, wenn sich nun die Argumente und Indizes 0 und 1 auf  $z_0$  und  $z_1$  beziehen:

$$(21) \begin{cases} \Delta = \left[ \{F_1(0)F_2(1) - F_2(0)F_1(1)\} + \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \left( \frac{df_1}{dz} \right)_0 \left( \frac{df_2}{dz} \right)_1 - \left( \frac{df_2}{dz} \right)_0 \left( \frac{df_1}{dz} \right)_1 \right\} \right] \sin \alpha \\ + \frac{i}{\alpha} \left[ \left\{ F_1(0) \left( \frac{df_2}{dz} \right)_1 - F_2(1) \left( \frac{df_1}{dz} \right)_0 \right\} - \left\{ F_2(0) \left( \frac{df_1}{dz} \right)_1 - F_1(1) \left( \frac{df_2}{dz} \right)_0 \right\} \right] \cos \alpha \\ - \frac{i}{\alpha} \left[ \left\{ F_1(0) \left( \frac{df_2}{dz} \right)_0 - F_2(1) \left( \frac{df_1}{dz} \right)_1 \right\} - \left\{ F_2(0) \left( \frac{df_1}{dz} \right)_0 - F_1(1) \left( \frac{df_2}{dz} \right)_1 \right\} \right] = 0. \end{cases}$$

Allgemein sind dabei die Funktionen

$$(22) \quad \varphi_{1,2} = z^{1/2} Z_{1/2}^{(1),(2)} \left( \frac{1}{2} z^{1/2} \right),$$

wobei  $Z_{1/2}$  eine Zylinderfunktion mit dem Index  $1/2$  bedeutet, und

$$(23) \quad f_{1,2} = \frac{\alpha}{\alpha^2} \int_0^z \varphi_{1,2}(z') \sin \alpha(z' - z) dz'.$$

Wir werden aber im folgenden nur mit Näherungen arbeiten, die auch unmittelbar aus den Differentialgleichungen entnommen werden können.

Aus den Wurzeln der Gleichung (20) oder (21) erhalten wir die Werte von  $\beta$ , welche eine Lösung des Problems zulassen. Der reelle Teil von  $\beta$  ist maßgebend für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störung, der imaginäre Teil für das zeitliche Abnehmen oder Anwachsen der Störung, also für die Stabilität oder Instabilität der Strömung. Instabilität tritt dann ein, wenn der imaginäre Teil von  $\beta$  negativ und infolgedessen der reelle Teil von  $z_0$  und  $z_1$  größer als  $\alpha^2$  ist.

Die Stromfunktion  $f$  und damit den Verlauf der ganzen Strömung erhalten wir in der Form:

$$(24) \quad f = F_1^*(0) f_1^*(\eta) - F_2^*(0) f_2^*(\eta).$$

Dieser Ausdruck erfüllt die Differentialgleichung und alle Grenzbedingungen.

#### § 4. Grenzfall ruhender Flüssigkeit; kleine $\alpha R$ .

Wie bereits oben erwähnt, gehen die Gleichungen (9) und (11) in dieselbe Form über, die man bei Ansatz des Problems für ruhende Flüssigkeit erhält, wenn man  $R$  zu Null werden läßt. Natürlich hat es aber nur einen Sinn,  $\alpha R = 0$  zu setzen, da  $\beta$  ja die Unbekannte ist und  $\beta R$  auch für  $R = 0$  endlich bleiben kann.

Wir wollen uns hier aber nicht nur auf den Grenzfall  $\alpha R = 0$  beschränken, sondern einen Überblick gewinnen, in welcher Weise sich die Schwingungen für kleine  $\alpha R$  gestalten, und wie weit die errechnete Näherung gültig ist; darum wollen wir die ersten Potenzen von  $\alpha R$  beibehalten. Die Rechnungen werden übersichtlicher, wenn wir die Symmetrie unseres Problems ausnutzen und die neue Variable

$$\eta' = \eta - \frac{1}{2}$$

einführen. Dann haben die beiden Wände die Koordinaten  $\eta' = \pm \frac{1}{2}$ . Die Differentialgleichung für  $\varphi$  wird mit der Abkürzung

$$(25) \quad \gamma^2 = \alpha^2 + i R (\beta - \alpha/2)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d \eta'^2} - \gamma^2 \varphi + i \alpha R \eta' \varphi = 0,$$

ihre Lösungen nach der Methode der sukzessiven Approximationen:

$$(26) \quad \begin{cases} \varphi_1 = e^{\gamma \eta'} \left\{ 1 + i \alpha R \left( -\frac{1}{8 \gamma^3} + \frac{\eta'}{4 \gamma^2} - \frac{\eta'^2}{4 \gamma} \right) \right\} \\ \varphi_2 = e^{-\gamma \eta'} \left\{ 1 + i \alpha R \left( +\frac{1}{8 \gamma^3} + \frac{\eta'}{4 \gamma^2} + \frac{\eta'^2}{4 \gamma} \right) \right\} \end{cases}$$

Von  $f_{1,2}$  brauchen wir nur das erste Glied

$$(27) \quad f_1 = \frac{e^{\gamma \eta'}}{\gamma^2 - \alpha^2} \quad f_2 = \frac{e^{-\gamma \eta'}}{\gamma^2 - \alpha^2}.$$

Nun werden die in Gleichung (20) vorkommenden Funktionen

$$(28) \quad \begin{cases} F_1 = e^{\gamma \eta'} \left\{ \frac{i\gamma}{\alpha R} + \left( \frac{1}{\gamma^2 - \alpha^2} - \frac{1}{8\gamma^2} + \frac{\eta'}{4\gamma} + \eta'^2 \right) \right\} \\ F_2 = e^{-\gamma \eta'} \left\{ -\frac{i\gamma}{\alpha R} + \left( \frac{1}{\gamma^2 - \alpha^2} - \frac{1}{8\gamma^2} - \frac{\eta'}{4\gamma} + \eta'^2 \right) \right\}, \\ \frac{df_1}{d\eta} = \frac{\gamma}{\gamma^2 - \alpha^2} e^{\gamma \eta'} \quad \frac{df_2}{d\eta} = -\frac{\gamma}{\gamma^2 - \alpha^2} e^{-\gamma \eta'} \end{cases}$$

und wenn man mit diesen Funktionen unter Berücksichtigung der Bedeutung von  $\eta'$  in Gleichung (20) eingeht, heben sich alle Glieder mit  $\alpha R$  weg. Die Gleichung lautet wie bei ruhenden Flüssigkeiten

$$(29) \quad (\alpha R)^2 \Delta = 2\gamma^2 \sin \gamma = 0.$$

Diese Gleichung hat die rein imaginären Wurzeln

$$\gamma = 0, \quad i\pi, \quad 2i\pi \dots$$

Die Unbekannte  $i\beta R$ , die nach (25) die Form hat

$$i\beta R = \gamma^2 - \alpha^2 + i\frac{\alpha R}{2},$$

hat also stets einen negativ reellen Teil; alle Schwingungen verlaufen mit Dämpfung; die Hauptströmung ist für kleine  $\alpha R$  absolut stabil. Die Partialschwingung, welche zum kleinsten Wert von  $\gamma$  gehört, hat die geringste Dämpfung.

Solange  $\alpha R$  klein ist — also auch für große Reynoldssche Zahlen, wenn die Störung von entsprechend großer Wellenlänge ist —, bleibt die Dämpfung der Schwingung dieselbe, wie auf der ruhenden Flüssigkeit. Nur der imaginäre Teil von  $i\beta R$  hängt von  $\alpha R$  ab, und zwar so, daß der reelle Teil von  $\beta = \alpha/2$  ist, d. h. die Störung schreitet mit der mittleren Hauptströmungsgeschwindigkeit fort; alle Partialschwingungen werden in gleicher Weise von der Hauptströmung mitgenommen.

Unsere Ableitung versagt, wie man den Ausdrücken (28) ansieht, an den Stellen  $\gamma = 0$  und  $\gamma^2 - \alpha^2 = 0$ . Es muß also hier noch unentschieden bleiben, ob die oben errechnete Wurzel  $\gamma = 0$  wirklich vorhanden ist. Wir werden in § 6 sehen, daß dies der Fall ist. Die Stelle  $\gamma^2 = \alpha^2$  erfordert eine besondere Überlegung:

Ist  $\gamma = \alpha + \varepsilon$  und  $\varepsilon$  verschwindend klein, so ändert sich an den Ausdrücken für  $\varphi_{1,2}$  nichts; aber es wird

$$f_{1,2} = \eta e^{\pm \alpha \eta} + \varepsilon H_1 + \alpha R H_2,$$

wobei  $H_1$  und  $H_2$  nur von  $\eta$  und  $\alpha$  abhängen. Eine Wurzel  $\gamma \sim \alpha$  ist dann vorhanden, wenn sich im Ausdruck  $(\alpha R)^2 \Delta$  die nicht von  $\varepsilon$  und  $\alpha R$  abhängigen Glieder wegheben; dann gibt es nämlich eine Lösung  $\varepsilon \sim \alpha R$ . Dies ist jedoch hier nicht der Fall; auch jetzt werden alle von  $f_{1,2}$  und  $d f_{1,2}/d\eta$  herrührenden Glieder von kleinerer Ordnung als die von  $d\varphi_{1,2}/d\eta$  herrührenden und  $(\alpha R)^2 \Delta$  wird in erster Näherung

$$(\alpha R)^2 \Delta = -2\alpha^2 \sin \alpha \neq 0$$

Also existieren für den Grenzfall „ $\alpha R$  klein“ keine anderen Wurzeln als die durch Gleichung (29) gegebenen.

Wir haben nun noch dieses System von Schwingungen genauer zu beschreiben. Dies geschieht mit Hilfe der Gleichungen (16), (17) und (24), und zwar werden in erster Ordnung bis auf belanglose Konstanten:

$$f_1^* = e^{\gamma \eta'} - \frac{\gamma}{\alpha} \left\{ \frac{\cos \gamma/2}{\cos \alpha/2} \sin \alpha \eta' + \frac{\sin \gamma/2}{\sin \alpha/2} \cos \alpha \eta' \right\}$$

$$f_2^* = e^{-\gamma \eta'} + \frac{\gamma}{\alpha} \left\{ \frac{\cos \gamma/2}{\cos \alpha/2} \sin \alpha \eta' - \frac{\sin \gamma/2}{\sin \alpha/2} \cos \alpha \eta' \right\}$$

$$F_1^*(0) = e^{-\gamma/2}$$

$$F_2^*(0) = -e^{+\gamma/2}$$

Ist nun  $\gamma = 0, 2i\pi, 4i\pi \dots$ , so wird  $F_1^*(0) = -F_2^*(0)$ ; im Ausdruck (24) heben sich dann die Glieder mit  $\sin \alpha \eta'$  heraus, und die Glieder mit  $\cos \alpha \eta'$  haben den Faktor  $\sin \gamma/2$ , der für die in Frage kommenden Werte zu Null wird. Die Stromfunktion  $f$  erhält den einfachen Ausdruck

$$(30) \quad f = \cos 0 \cdot \eta', \quad \cos 2\pi \eta', \quad \cos 4\pi \eta' \dots$$

Da  $u \sim df/d\eta$ ,  $v \sim f$ , stellt dies Schwingungen dar, bei welchen die ganze Strömung 0mal, 2mal, 4mal unterteilt ist durch

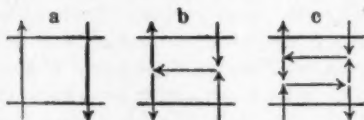


Fig. 3.

Schichten, in denen die normal zur Wand gerichtete Geschwindigkeit  $v$  verschwindet. Da der Cosinus eine gerade Funktion ist, gehört zu einer positiven Ausschwingung

der einen Wand auch eine positive Ausschwingung der anderen; die beiden Wände schwingen in der gleichen Phase. Fig. 3a und c zeigen die Grundschwingung und die zur Wurzel  $\gamma = 2\pi i$

gehörige 2. Oberschwingung. Bei der Grundschwingung ist die Geschwindigkeitskomponente  $u$  in der ganzen Strömung Null,  $v$  konstant. Daß die Grundschwingung so verläuft, ist physikalisch einleuchtend, obwohl die Gültigkeit der Wurzel  $\gamma = 0$ , wie schon bemerkt, aus unserer Ableitung noch nicht hervorgeht.

Ist  $\gamma = i\pi, 3i\pi \dots$ , so wird  $F_1^*(0) = F_2^*(0)$ ; in (24) heben sich die Glieder mit  $\cos a\eta'$  weg und die Glieder mit  $\sin a\eta'$  verschwinden wegen ihres zu Null werdenden Faktors  $\cos \gamma/2$ . Es wird

$$f = \sin \pi \eta', \quad \sin 3\pi \eta' \dots$$

Bei den so dargestellten ungeraden Oberschwingungen ist die Strömung 1mal, 3mal . . . unterteilt und die beiden Wände schwingen in entgegengesetzter Phase (Fig. 3b).

Wir haben ein vollständiges System von Schwingungen vor uns, das ganz analog dem in der früheren Arbeit gefundenen und dort als 1. Typus bezeichneten verläuft. Es ist bemerkenswert, daß trotz dieser physikalischen Gleichheit formal ein großer Unterschied zwischen den beiden Systemen besteht. Die Grundschwingung wird bei dem früher behandelten System mit verschwindender Geschwindigkeit an den Wänden durch eine Wurzel dargestellt, welche zwischen  $\pi i$  und  $2\pi i$  liegt, welche also eigentlich unserer jetzigen 2. Oberschwingung entspricht. In dem jetzt behandelten Fall existieren also formal 2 Wurzeln mehr. In den §§ 5 und 8 werden wir sehen, daß der Unterschied bei großem  $aR$  tatsächlich bedeutungsvoll wird. Die höheren Oberschwingungen wandeln sich nämlich mit wachsendem  $aR$  zu dem früher sogenannten 2. und 3. Schwingungstypus, wobei die 2. Oberschwingung die Rolle der früheren Grundschwingung spielt; die diesmalige Grundschwingung und die erste Oberschwingung hingegen zeigen einen ganz abweichenden neuen Typus, der bei dem früher behandelten Fall gar nicht auftritt und der zur Instabilität führt. Für  $R = \infty$ , also bei Annäherung an das Verhalten reibungsloser Flüssigkeiten, gehen die höheren Oberschwingungen in die Lösungen der ersten Klammer der Differentialgleichung (4)

$$\beta - a\eta = 0$$

über, die Grundschwingung und die erste Oberschwingung in die beiden Lösungen der 2. Klammer

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} - \alpha^2 f = 0,$$

die bei verschwindender Geschwindigkeit an der Wand nicht vorhanden sind, also in der früheren Arbeit wegflielen.

Dieser prinzipielle Unterschied zwischen den beiden Ansätzen tritt also im Grenzfall „ $\alpha R$  klein“ physikalisch überhaupt nicht hervor.

### § 5. Grenzfall großer $\alpha R$ .

Wird  $\alpha R$  groß, so liegt die Annahme nahe, daß auch  $z$  groß ist, daß man also durch asymptotische Integration der Differentialgleichung (14) zu einer brauchbaren Näherung gelangt. Man kann diese Näherung entweder der Differentialgleichung direkt oder ihren Lösungen (22) und (28) entnehmen.

Wir wollen uns hier auf die ersten Glieder der asymptotischen Entwicklung beschränken, welche lauten:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(\alpha R)^{1/2}} \varphi_1 = z^{-1/2} e^{i \frac{2}{3} z^{3/2}}, \\ \frac{1}{(\alpha R)^{1/2}} \varphi_2 = z^{-1/2} e^{-i \frac{2}{3} z^{3/2}}, \\ f_1 = \frac{z^{-1/2}}{z - \kappa^2} e^{i \frac{2}{3} z^{3/2}}, \\ f_2 = \frac{z^{-1/2}}{z - \kappa^2} e^{-i \frac{2}{3} z^{3/2}}. \end{array} \right.$$

Die Reihen schreiten nach absteigenden Potenzen von  $z^{1/2}$  und  $z - \kappa^2$  fort und sind semikonvergent; unsere Ausdrücke gelten nur dann, wenn die Lösung Werte von  $z$  ergibt, die von den Punkten  $z = 0$  und  $z = \kappa^2$  weit entfernt sind. (Bei dem früher behandelten Ansatz war das durchgehends der Fall.) Ferner ist aber auch zu beachten, was in der früheren Arbeit (§ 2) über die Umlaufsrelationen der Zylinderfunktion gesagt wurde. Darnach sind unsere Ausdrücke nur zu brauchen, solange alle vorkommenden Werte von  $z$ , also speziell die Grenzwerte  $z_0$  und  $z_1$  im nämlichen Gebiete I oder II oder III der komplexen  $z$ -Ebene liegen (Fig. 4). Die im vorigen Kapitel behandelten Schwingungen entsprechen Wurzeln, welche gerade auf der Grenze der Gebiete II und III liegen. An diese können wir mit den jetzigen Ausdrücken keinen direkten Anschluß finden. Dagegen gelten die Ausdrücke genau im Gebiet I und mit sehr



guter Annäherung in den Grenzgebieten von I gegen II und III, also auf der ganzen Halbebene mit positiv reellem Teil von  $z$ . Dort müssen aber die Wurzeln liegen, wenn eine Instabilität herauskommen soll. Das Instabilitätsgebiet wird gegen das Stabilitätsgebiet durch die Gerade  $\Re z = \kappa^2$ , die in Fig. 4 eingezeichnet ist, abgegrenzt. Nun werden die in Gleichung (21) vorkommenden Funktionen:

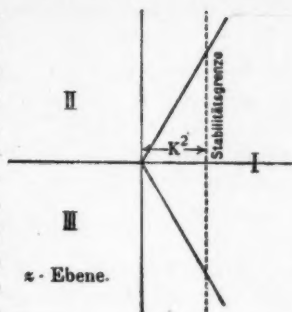


Fig. 4.

$$(32) \quad \begin{cases} F_1 = iz^1 \cdot e^{i\frac{2}{3}z^{3/2}}, & F_2 = -iz^{1/2} e^{-i\frac{2}{3}z^{3/2}}, \\ \frac{df_1}{dz} = \frac{iz^{1/2}}{\kappa - z^2} e^{i\frac{2}{3}z^{3/2}}, & \frac{df_2}{dz} = -\frac{iz^{1/2}}{\kappa - z^2} e^{-i\frac{2}{3}z^{3/2}}. \end{cases}$$

Die Ausdrücke  $df/dz$  werden von kleinerer Ordnung als die Ausdrücke  $F$ ; trotzdem darf man sie in Gleichung (21) nicht wegstreichen, da dort

$$\frac{1}{z} \frac{df}{dz}$$

gegen  $F$  steht und  $\kappa$  bei großem  $\alpha R$  sehr klein wird.

Elementare Rechnung ergibt nun für (21) die Formel:

$$(33) \quad \begin{cases} \Delta = 2iz_0^{1/2} z_1^{1/2} \left[ \left\{ 1 + \frac{1}{\kappa^2(z_0 - \kappa^2)(z_1 - \kappa^2)} \right\} \right. \\ \left. \sin \alpha + \frac{i}{\kappa} \left\{ \frac{1}{z_1 - \kappa^2} - \frac{1}{z_0 - \kappa^2} \right\} \cos \alpha \right] \cdot \sin \frac{2}{3}(z_0^{3/2} - z_1^{3/2}) = 0. \end{cases}$$

Die Wurzeln von  $\sin \frac{2}{3}(z_0^{3/2} - z_1^{3/2})$  liegen in den Gebieten II und III: sie haben keine Gültigkeit. Die eckige Klammer kommt bei Berücksichtigung der Beziehung

$$z_0 - z_1 = i(\alpha R)^{1/2}$$

und der Bedeutung von  $\kappa$  nach (18) auf die Form:

$$\{\kappa^2(z_0 - \kappa^2)(z_1 - \kappa^2) + 1\} \sin \alpha - \alpha \cos \alpha = 0$$

und setzen wir

$$z_{0,1} = \xi \pm i \frac{(\alpha R)^{1/2}}{2} \equiv \xi \pm i \frac{\alpha}{\kappa},$$

so wird

$$(34) \quad \begin{cases} x^2(\xi - x^2)^2 + \frac{\alpha^2}{4} + 1 - \alpha \cotg \alpha = 0 \\ \xi = x^2 \pm \frac{1}{x} \sqrt{\alpha \cotg \alpha - 1 - \frac{\alpha^2}{4}} \end{cases}$$

Infolge (12) ist

$$\xi = x^2 + \frac{i\beta - \frac{\alpha}{2}}{x},$$

daher (34) vollkommen identisch mit (8). Für große  $\alpha$   $R$  ist der zeitliche Verlauf einer kleinen Störung derselbe wie bei reibungslosen Flüssigkeiten. Gegen Störungen von der räumlichen Frequenz  $\alpha > 2,4$  verhält sich die Strömung indifferent, gegen  $\alpha < 2,4$  instabil.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $V$ , gleichfalls dieselbe wie bei reibungslosen Flüssigkeiten, ist

$$V = \frac{\beta U}{\alpha};$$

also bei den instabilisierenden Störungen ( $\alpha < 2,4$ ) für beide Schwingungen gleich der mittleren Geschwindigkeit  $U/2$  der Hauptströmung, bei  $\alpha > 2,4$ :

$$(35) \quad V = U \left( \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{4} - \frac{\cotg \alpha}{\alpha}} \right),$$

also den Strömungsgeschwindigkeiten in 2 symmetrisch zur Mitte liegenden Schichten gleich, in der Grenze  $\alpha = \infty$  den Geschwindigkeiten  $0$  und  $U$  der beiden Wände.

Für die Diskussion der Stromlinien ist die Lage der Grenzen  $z_0$  und  $z_1$  auf der  $z$ -Ebene wichtig. Zur Veranschaulichung ist diese Lage für  $(\alpha R)^{1/2} = 10$  und  $\alpha = 0,1, 1$  und  $10$  in Fig. 5 dargestellt. Die Größe  $\kappa^2$  ist in den ersten 2 Fällen so klein, daß sie in der Figur gar nicht in Erscheinung tritt. Die gedämpfte Oberschwingung kann nicht als exakt berechnet gelten, da die dazu gehörigen  $z$ -Werte zu tief in den Gebieten II und III liegen. Auch bei großem  $\kappa^2$  ist die Lösung nicht mehr exakt, da der Punkt  $z_1$  oder  $z_0$  zu nahe an den Punkt  $\kappa^2$  heranrückt. Doch ist die genauere Diskussion dieser Schwingungen nicht von Interesse; sie wird trotz dieser Unexaktheit nichts ergeben, was von dem folgenden abweicht.

Die in (24) vorkommenden Funktionen werden:

$$F_1^*(0) = i z_0^{-1/4} e^{i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} - \frac{1}{\pi \sin \alpha} \left\{ \frac{x_1^{-1/4}}{x_1 - x^2} e^{i \frac{2}{3} z_1^{3/2}} - \frac{x_0^{-1/4}}{x_0 - x^2} e^{i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} \cot \alpha \right\}.$$

Nun ist in allen Fällen, wie man Fig. 5 ohne weiteres ansieht

$$e^{i \frac{2}{3} z_1^{3/2}} > e^{i \frac{2}{3} z_0^{3/2}},$$

daher reduziert sich  $F_1^*(0)$  auf

$$(36) \quad F_1^*(0) = - \frac{1}{\pi \sin \alpha} \frac{x_1^{-1/4}}{x_1 - x^2} e^{i \frac{2}{3} z_1^{3/2}}.$$

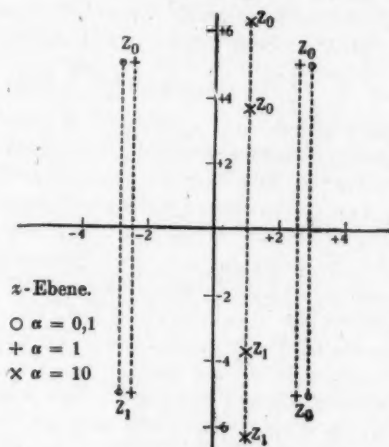


Fig. 5.

Im Ausdruck für  $F_2^*(0)$  berücksichtigen wir, daß

$$e^{-i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} > e^{-i \frac{2}{3} z_1^{3/2}}$$

und erhalten

$$(37) \quad F_2^*(0) = - z_0^{-1/4} e^{-i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} \left( i + \frac{\cot \alpha}{\pi (x_0 - x^2)} \right).$$

Mit der gleichen Vernachlässigung werden:

$$(38) \quad f_1^*(\eta) = \frac{x^{-1/4}}{x - x^2} e^{i \frac{2}{3} z^{3/2}} - \frac{1}{\pi \sin \alpha} \frac{x_1^{-1/4}}{x_1 - x^2} e^{i \frac{2}{3} z_1^{3/2}} \cot \alpha \eta,$$

$$(39) \quad f_2^*(\eta) = \frac{x^{-1/4}}{x - x^2} e^{-i \frac{2}{3} z^{3/2}} + \frac{x_0^{-1/4}}{\pi (x_0 - x^2)} e^{-i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} (\sin \alpha \eta - \cot \alpha \cot \alpha \eta).$$

In (24) eingesetzt:

$$(40) \left\{ \begin{aligned} f = e^{i\frac{1}{2}(z_1^{3/2} - z_0^{3/2})} & \left[ -z_0^{1/4} \left( i + \frac{\operatorname{Cotg} \alpha}{\pi(z_0 - x^2)} \right) \left( \frac{z^{-1/4}}{z - x^2} e^{i\frac{1}{2}(z^{3/2} - z_1^{3/2})} \right. \right. \\ & - \frac{1}{\pi \operatorname{Sin} \alpha} \frac{z_1^{1/4}}{z_1 - x^2} \operatorname{Cot} \alpha \eta \Big) + \frac{1}{\pi \operatorname{Sin} \alpha} \frac{z_1^{1/4}}{z_1 - x^2} \left( \frac{z^{-1/4}}{z - x^2} e^{i\frac{1}{2}(z_0^{3/2} - z^{3/2})} \right. \\ & \left. \left. + \frac{z_0^{1/4}}{\pi(z_0 - x^2)} (\operatorname{Sin} \alpha \eta - \operatorname{Cotg} \alpha \operatorname{Cot} \alpha \eta) \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Der Klammerausdruck zerfällt in 2 Teile, wie schon durch die Benutzung der verschiedenen Variablen  $z$  und  $\eta$  hervorgehoben ist. Die Ausdrücke

$$e^{i\frac{1}{2}(z^{3/2} - z_1^{3/2})} \quad \text{und} \quad e^{i\frac{1}{2}(z_0^{3/2} - z^{3/2})}$$

werden 1 für  $z = z_1$  bzw.  $z = z_0$ , also je an einer Wand, und nehmen von dort aus sehr schnell ab, wenn sich  $z$  auf der in Fig. 5 eingezeichneten Parallelen zur imaginären Achse gegen den Punkt  $z_0$  bzw.  $z_1$  bewegt. Gleichen Schichtabständen  $\eta$  entsprechen um so größere Abschnitte auf dieser Geraden, je größer  $\alpha R$  ist. Die Abnahme der durch diese Ausdrücke dargestellten Bewegung von der Wand aus erfolgt also um so schneller, je größer die Reynoldssche Zahl ist. Der andere Teil von  $f$ , der nur die Funktionen  $\operatorname{Sin} \alpha \eta$  und  $\operatorname{Cot} \alpha \eta$  enthält, stellt eine wirbellose Bewegung dar, wie sie sich in reibungslosen Flüssigkeiten ausbildet. *Das ganze Innere unserer Strömung wird beherrscht von einer Potentialbewegung, und nur in engen Grenzschichten an den Wänden kommt die Wirkung der Reibung so zur Geltung, daß die Grenzbedingungen richtig erfüllt sind. Diese Grenzschichten sind um so enger, je größer die Reynoldssche Zahl ist. Somit ist in unserem Fall aus der Theorie der reibenden Flüssigkeiten ein Verhalten gefolgert, welches als Grundannahme der Prandtl'schen Grenzschichtentheorie in der Hydrodynamik eine bedeutende Rolle spielt.*<sup>1)</sup>

Der wirbellose Teil der Bewegung läßt sich auf denselben einfachen Ausdruck bringen, der auch unmittelbar aus der Theorie der reibungslosen Flüssigkeiten mit Hilfe unserer Gleichungen (5) und (7) gefolgert werden kann; er erfüllt also für sich gerade die Grenzbedingungen der reibungslosen Flüssig-

1) L. Prandtl, Verh. des int. Math.-Kongr. 1904; H. Blasius, Zeitschrift f. Math. u. Phys. 50. Heft 1. 1908.

keit. Bei Unterdrückung belangloser Konstanten wird bis auf die unmittelbare Nähe der Wände nach (40)

$$f = i \operatorname{Cof} \alpha \eta + \frac{1}{x(x_0 - x^2)} \operatorname{Sin} \alpha \eta,$$

oder nach (12) und (13)

$$(41) \quad f = \operatorname{Sin} \alpha \eta - \beta \operatorname{Cof} \alpha \eta.$$

Der *Stromlinienverlauf* dieser Schwingungen ist sehr vielgestaltig. Allgemein ist die Stromfunktion zur Zeit  $t = 0$

$$\Pi = f e^{-i \alpha t}$$

und die Stromlinien sind durch die Gleichung

$$\Re \Pi = \text{const}$$

gegeben. Schreiben wir nun

$$(42) \quad f = P e^{\pm i \Phi},$$

so wird

$$(43) \quad \Re \Pi = P \cos(\alpha \xi \mp \Phi).$$

Nach Fig. 2 wird  $\Phi = 0$  für  $\alpha > 2,4$ , für kleinere  $\alpha$  ist es — wie  $P$  immer — eine Funktion von  $\eta$ . In der Gleichung

$$\beta = \frac{d}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{a^2}{4} - \alpha \operatorname{Cotg} \alpha}$$

gehört das positive Vorzeichen zur gedämpften, das negative zur anwachsenden Schwingung; in Gleichung (42) ist es wegen (41) umgekehrt, in Gleichung (43) dagegen wieder so, daß das negative Vorzeichen der anwachsenden Schwingung entspricht, welche Instabilität erzeugt. Für  $\alpha < 2,4$  wird nun

$$(44) \quad P = \sqrt{\left(\operatorname{Sin} \alpha \eta - \frac{\alpha}{2} \operatorname{Cof} \alpha \eta\right)^2 + \left(1 + \frac{a^2}{4} - \alpha \operatorname{Cotg} \alpha\right) \operatorname{Cof}^2 \alpha \eta},$$

$$(45) \quad \cotg \Phi = \frac{\operatorname{Cotg} \alpha \eta - \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{4} - \alpha \operatorname{Cotg} \alpha}}.$$

Diese Ausdrücke sind um die Mitte  $\eta = \frac{1}{2}$  symmetrisch, was bei der Symmetrie des physikalischen Problems selbstverständlich ist; in obiger Form sieht man die Symmetrie nicht; doch lohnt sich eine Umformung nicht, da die Ausdrücke sehr handlich sind.

Man rechnet am besten  $P$  und  $\Phi$  als Funktionen von  $\eta$  aus, gibt sich dann bestimmte konstante Werte für den reellen Teil von  $II$  und erhält aus (43) die zu bestimmten  $\eta$ -Werten gehörigen  $\alpha \xi$ -Werte. Als Beispiel sei das Rechnungsergebnis für die instabilisierende Schwingung für  $\alpha = 2$ , daher  $\beta = 1 - 0,273 i$ , mitgeteilt.

Tabelle.

			$Re II$ = 0	$Re II$ = 0,3	$Re II$ = 0,5	$Re II$ = 0,56	$Re II$ = 0,64	$Re II$ = 1,04
$\eta$	$P$	$\Phi^0$	$\alpha \xi^0$					
0	1,04	-16	74 u. - 106	59 u. - 89	46 u. - 76	42 u. - 72	36 u. - 68	- 16
0,1	0,87	-18	72 u. - 108	52 u. - 88	36 u. - 74	32 u. - 68	24 u. - 60	imag.
0,2	0,73	-24	66 u. - 114	41 u. - 89	28 u. - 71	15 u. - 63	4 u. - 52	imag.
0,3	0,64	-30	60 u. - 120	32 u. - 92	8 u. - 68	- 2 u. - 60	- 30	imag.
0,4	0,58	-39	51 u. - 129	20 u. - 98	- 9 u. - 69	- 24 u. - 54	imag.	imag.
0,5	0,56	-49	41 u. - 139	9 u. - 107	- 22 u. - 76	- 49	imag.	imag.
0,6	0,58	-59	31 u. - 149	0 u. - 118	- 29 u. - 89	- 44 u. - 74	imag.	imag.
0,8	0,73	-74	16 u. - 164	- 9 u. - 139	- 27 u. - 121	- 35 u. - 113	- 46 u. - 102	imag.
1,0	1,04	-82	8 u. - 172	- 9 u. - 155	- 21 u. - 143	- 25 u. - 139	- 30 u. - 134	- 82

Das Ergebnis veranschaulicht Fig. 6. Es gibt Stromlinien, welche an einer Wand beginnen und an der anderen enden, und solche, welche an dieselbe Wand zurücklaufen. Die Grenze zwischen beiden ist gegeben durch

$$Re II = P^{(1/2)}.$$

Die Stromlinien  $Re II = P(0) = P(1)$  schrumpfen zu Punkten zusammen. Charakteristisch für den Vergleich mit denselben Schwingungen bei kleiner Reynoldsscher Zahl (Fig. 3) ist die Verzerrung der ganzen Schwingung. Während dort die Phasen an beiden Wänden übereinstimmen, ist hier das ganze Stromlinienbild verdreht und zwar, wie Fig. 6 gleichfalls erkennen läßt, im entgegengesetzten Sinn des Geschwindigkeitsanstiegs

in der Hauptströmung. Die andere Schwingung, welche durch (49) dargestellt wird, und welche gedämpft ist, unterscheidet sich von der diskutierten nur durch das Vorzeichen von  $\Phi$ ; man erhält ihr Stromlinienbild durch Spiegelung der Fig. 6 an der  $\eta$ -Achse. Bei dieser Schwingung geht die Verdrehung im Sinn des Geschwindigkeitsanstiegs. Sie gemahnt daher an den früher sogenannten 2. Typus von Schwingungen (Fig. 26 der alten Arbeit). Bei sehr großer Reynoldsscher Zahl und  $\alpha < 2,4$  bilden sich also 2 Schwingungen aus, die gegenüber den Schwingungen bei kleiner Reynoldsscher Zahl stark verzerrt erscheinen; die im Sinn des Geschwindigkeitsanstiegs in der Hauptströmung

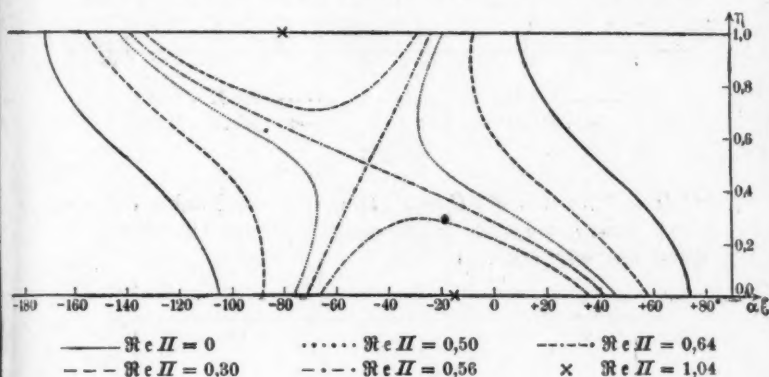


Fig. 6.

verzerrte Schwingung ist gedämpft, die im entgegengesetzten Sinn verzerrte widerstrebt der Hauptströmung und macht sie instabil.

Je kleiner  $\alpha$  ist, um so mehr schrumpft das Gebiet zwischen den Stromlinien  $\text{Re } II = P (1/2)$  zusammen, um so mehr Stromlinien gehen also von einer Wand zur anderen. In der Grenze  $\alpha = 0$  zeigen alle Stromlinien dieses Verhalten. Fig. 7 veranschaulicht die Stromlinien für  $\alpha = 0,1$ . Bei  $\alpha = 2,4$  verschwindet die Verzerrung vollständig; die Stromlinien  $\text{Re } II = 0$  sind Gerade, parallel zur  $y$ -Achse; die beiden Wände schwingen wieder in übereinstimmender Phase (Fig. 8).

Bei  $\alpha > 2,4$  zeigt sich ein ganz anderes Bild. Jetzt ist  $\Phi = 0$  und

$$(46) \quad \text{Re } II = (\sin \alpha \eta - \beta \cos \alpha \eta) \cos \alpha \xi.$$



Die Stromlinie  $\Re e H = 0$  wird für jedes  $a$ , wie bei  $a = 2,4$  von den Geraden  $a\xi = \pm 90^\circ$  gebildet; die Stromlinien

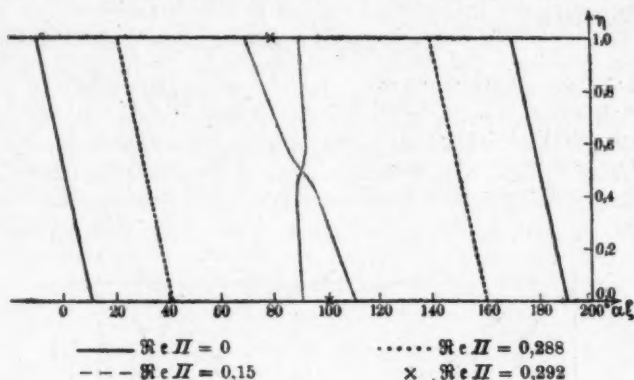


Fig. 7.

$\Re e H = P(0)$  und  $\Re e H = P(1)$ , werden die Punkte  $a\xi = 0$ ,  $\eta = 0$ , bzw.  $\eta = 1$ . Die Schwingungsamplitude nimmt von der Wand aus sehr rasch ab.

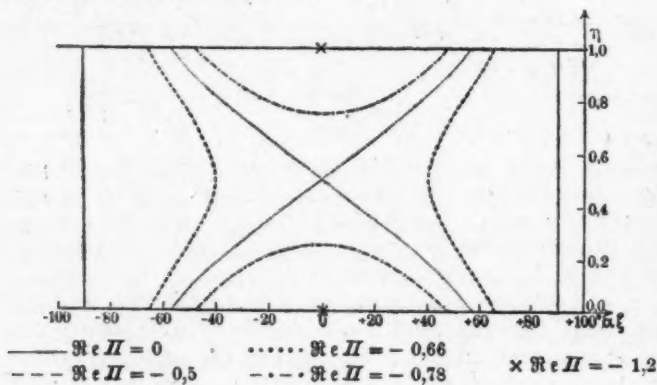


Fig. 8.

Fig. 9 zeigt die Stromlinien für  $a = 3$ ; dabei ist das positive Vorzeichen im Ausdruck für  $\beta$  gewählt. Nimmt man das negative, so erhält man das Spiegelbild; Symmetrieachse ist dabei die

Gerade  $\eta = 1/2$ . Der Teilungspunkt  $A$ , der bei  $\alpha < 2,4$  in der Mitte lag, ist jetzt durch das Minimum von  $P$ , d. h. durch die Gleichung

$$\cotg \alpha \eta = \beta$$

gegeben. Er rückt offenbar zu immer kleineren Werten von  $\eta$ , je größer  $\alpha$  ist; für  $\alpha = 3$  liegt er bei  $\eta = 0,18$ , für  $\alpha = 10$  bei  $\eta = 0,011$ . Bei großem  $\alpha$ , also kleinen Wellenlängen, ist somit die Symmetrie der einzelnen Schwingung verloren gegangen; die durch das physikalische Problem geforderte Symmetrie

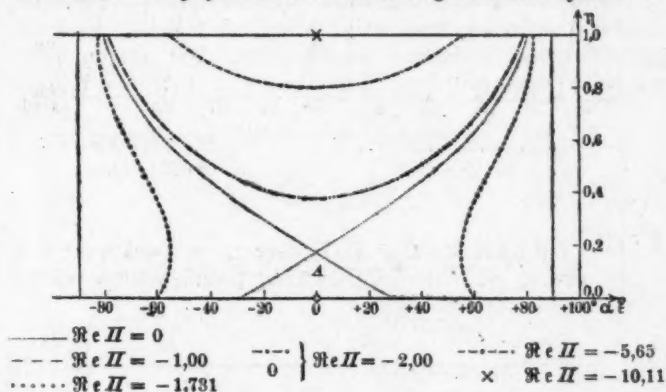


Fig. 9.

kommt erst heraus, wenn man die beiden Schwingungen zusammen betrachtet. Dies bedeutet physikalisch, daß die von den beiden Wänden ausgehenden Schwingungen unabhängig voneinander verlaufen. Ihre Wirkung ist auf die unmittelbare Nähe der Wand beschränkt. Damit erinnern diese Schwingungen an den 3. Typus der früheren Arbeit; doch ist die Analogie, wie auch oben beim 2. Typus, nur eine unvollkommene; denn der früher beschriebene 3. Typus bildete sich für jedes  $\alpha$  um so vollkommener aus, je größer  $\alpha R$  war, der jetzt beschriebene Typus existiert nur bei großem  $\alpha R$  und  $\alpha > 2,4$ , um so vollkommener, je größer  $\alpha$  ist.

#### § 6. Berechnung der kritischen Zahl für kleine $\alpha R$ .

Wir fanden nun bei kleinem  $\alpha R$  absolute Stabilität, bei großem  $\alpha R$  und  $\alpha < 2,4$  Instabilität gegen die Grundswin-

gung. Um die kritische Zahl  $R_*$  berechnen zu können, müssen wir die zur Grundschwingung gehörige Wurzel unserer transzendenten Gleichung in Abhängigkeit von  $a R$  weiter verfolgen. Im § 4 fanden wir  $\gamma = 0$ , also auch  $z = 0$  für die Grundschwingung, mußten aber diese Wurzel als nicht streng gültig zunächst noch ablehnen. Wir müssen nun die in der Nähe von  $z = 0$  liegende Wurzel von (21) exakt ableiten und darum die Lösungen unserer Differentialgleichungen (14) in der Nähe des Nullpunktes suchen.

Wir gehen zu diesem Zweck am besten von der Differentialgleichung selbst aus und integrieren sie mit Reihen nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Wir erhalten außer den schon bekannten Lösungen  $\cos \kappa z$  und  $\sin \kappa z$  die Reihen:

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} f_1 &= z^2 \left( \frac{1}{2!} - \frac{\kappa^2 z^2}{4!} + \frac{\kappa^4 z^4}{6!} - \dots \right) - 1 \cdot z^5 \left( \frac{1}{5!} - \frac{\kappa^2 z^2}{7!} + \frac{\kappa^4 z^4}{9!} - \dots \right) \\ &\quad + 1 \cdot 4 \cdot z^8 \left( \frac{1}{8!} - \frac{\kappa^2 z^2}{10!} + \dots \right) - \dots \\ f_2 &= z^3 \left( \frac{1}{3!} - \frac{\kappa^2 z^2}{5!} + \frac{\kappa^4 z^4}{7!} - \dots \right) - 2 \cdot z^6 \left( \frac{1}{6!} - \frac{\kappa^2 z^2}{8!} + \frac{\kappa^4 z^4}{10!} - \dots \right) \\ &\quad + 2 \cdot 5 \cdot z^9 \left( \frac{1}{9!} - \frac{\kappa^2 z^2}{11!} + \dots \right) - \dots \end{aligned} \right.$$

Dazu gehören die Ausdrücke

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{(\alpha R)^{3/4}} \varphi_1 &= 1 - \frac{\kappa^2}{3!} + \frac{1 \cdot 4}{6!} \kappa^6 - \dots \\ -\frac{1}{(\alpha R)^{5/4}} \varphi_2 &= z - \frac{2 \kappa^4}{4!} + \frac{2 \cdot 5}{7!} \kappa^7 z - \dots \end{aligned} \right.$$

Da zwar  $z$  klein, aber  $\kappa$  keiner Einschränkung unterworfen ist, kann  $\kappa z$  jeden beliebigen Wert annehmen; die  $\kappa z$  enthaltenden Klammern der Formeln (47) lassen sich aber leicht summieren:

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\kappa^2} (-\cos \kappa z + 1) - \frac{1}{\kappa^5} \left( \sin \kappa z - \frac{\kappa z}{1!} + \frac{\kappa^3 z^3}{3!} \right) \\ &\quad + \frac{1 \cdot 4}{\kappa^8} \left( \cos \kappa z - 1 + \frac{\kappa^2 z^2}{2!} - \frac{\kappa^4 z^4}{4!} + \frac{\kappa^6 z^6}{6!} \right) - \dots, \\ f_2 &= \frac{1}{\kappa^3} (-\sin \kappa z + \kappa z) - \frac{2}{\kappa^6} \left( -\cos \kappa z + 1 - \frac{\kappa^2 z^2}{2!} + \frac{\kappa^4 z^4}{4!} \right) \\ &\quad + \frac{2 \cdot 5}{\kappa^9} \left( \sin \kappa z - \frac{\kappa z}{1!} + \frac{\kappa^3 z^3}{3!} - \frac{\kappa^5 z^5}{5!} + \frac{\kappa^7 z^7}{7!} \right) - \dots \end{aligned} \right.$$

Konvergenzschwierigkeiten können nicht auftreten, da die Differentialgleichungen (14) im endlichen keine Singularitäten haben. Beim Einsetzen in die Gleichung (21) können wir die Ausdrücke sogar noch vereinfachen, indem wir die Summanden  $\cos \kappa z$  und  $\sin \kappa z$  in den Klammern der Formeln (49) weglassen; dieselben sind ja lineare Funktionen von  $\cos a \eta$  und  $\sin a \eta$ , daher im ganzen Aufbau der Gleichung (21) von selbst richtig berücksichtigt (s. § 3).

Es erweist sich als notwendig, 3 Glieder der Entwicklung zu berücksichtigen. Damit in den ziemlich weitläufigen Rechnungen die Übersicht erhalten bleibt, sind in allen folgenden Formeln die Glieder 1. Ordnung 2mal, die Glieder 2. Ordnung 1mal unterstrichen. Es werden:

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{\underline{x^3}} + \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{x^5} \left( \kappa z - \frac{\pi^2 \kappa^2}{6} \right) - \frac{\pi^5}{30} - \frac{4}{x^5} \\ &\quad \left( 1 - \frac{\pi^2 \kappa^2}{2} + \frac{\pi^4 \kappa^4}{24} - \frac{\pi^6 \kappa^6}{720} \right) + \frac{\pi^8}{1440}, \\ F_2 &= -1 + \frac{\kappa z}{\underline{x^3}} + \frac{\pi^2}{3} - \frac{2}{x^6} \left( 1 - \frac{\pi^2 \kappa^2}{2} + \frac{\pi^4 \kappa^4}{24} \right) - \frac{\pi^6}{72}, \end{aligned} \right.$$

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{df_1}{d\kappa} &= \frac{1}{x^4} \left( 1 - \frac{\pi^2 \kappa^2}{2} \right) + \frac{4}{x^7} \left( \kappa z - \frac{\pi^2 \kappa^2}{6} + \frac{\pi^5 \kappa^5}{120} \right), \\ \frac{df_2}{d\kappa} &= \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^6} \left( \kappa z - \frac{\pi^2 \kappa^2}{6} \right). \end{aligned} \right.$$

Daraus:

$$\begin{aligned} F_1(0) F_2(1) - F_2(0) F_1(1) &= -\frac{\pi_0^3 - \pi_1^3}{2} - \frac{1}{x^4} \left\{ (z_0 - z_1) + \frac{\pi^2}{6} (z_0^3 - z_1^3) \right\} \\ &\quad + \frac{\pi_0^5 - \pi_1^5}{30} + \left( \frac{1}{x^3} + \frac{\pi_0^2}{2} \right) \left( \frac{\pi_1}{x^3} + \frac{\pi_1^3}{8} \right) - \left( \frac{1}{x^3} + \frac{\pi_1}{2} \right) \left( \frac{\pi_0}{x^3} + \frac{\pi_0^3}{8} \right) \\ &\quad + \frac{4}{x^6} \left\{ -\frac{\pi_0^3 - \pi_1^3}{2} + \frac{\pi^2}{24} (z_0^4 - z_1^4) - \frac{\pi^4}{720} (z_0^6 - z_1^6) \right\} - \frac{\pi_0^8 - \pi_1^8}{1440} \\ &\quad - \left( \frac{1}{x^3} + \frac{\pi_0^2}{2} \right) \left\{ \frac{2}{x^6} \left( 1 - \frac{\pi^2 \pi_1^2}{2} + \frac{\pi^4 \pi_1^4}{24} \right) + \frac{\pi_1^6}{72} \right\} + \left( \frac{1}{x^3} + \frac{\pi_1^2}{2} \right) \\ &\quad \left\{ \frac{2}{x^6} \left( 1 - \frac{\pi^2 \pi_0^2}{2} + \frac{\pi^4 \pi_0^4}{24} \right) + \frac{\pi_0^6}{72} \right\} + \left\{ \frac{1}{x^4} \left( z_0 - \frac{\pi^2 \pi_0^3}{6} \right) - \frac{\pi_0^5}{30} \right\} \\ &\quad \left( \frac{\pi_1}{x^3} + \frac{\pi_1^3}{8} \right) - \left\{ \frac{1}{x^4} \left( z_1 - \frac{\pi^2 \pi_1^3}{6} \right) - \frac{\pi_1^5}{30} \right\} \left( \frac{\pi_0}{x^3} + \frac{\pi_0^3}{8} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{z_0^3 - z_1^3}{2} - \frac{2}{x^4}(z_0 - z_1) - \frac{1}{6x^3}(z_0^3 - z_1^3) + \frac{x_0 x_1}{2x^3}(z_0 - z_1) \\
&\quad + \frac{1}{30}(z_0^5 - z_1^5) - \frac{x_0^2 x_1^2}{6}(z_0 - z_1) - \frac{4}{x^6}(z_0^3 - z_1^3) + \frac{1}{4x^4}(z_0^4 - z_1^4) \\
&\quad - \frac{x_0 x_1}{2x^4}(z_0^3 - z_1^3) + \frac{1}{120x^3}(z_0^6 - z_1^6) - \frac{x_0 x_1}{30x^3}(z_0^4 - z_1^4) \\
&\quad + \frac{x_0^2 x_1^2}{24x^3}(z_0^3 - z_1^3) - \frac{1}{1440}(z_0^8 - z_1^8) + \frac{x_0^2 x_1^2}{144}(z_0^4 - z_1^4) \\
&\quad - \frac{x_0^3 x_1^3}{90}(z_0^2 - z_1^2) \\
&= -(z_0 - z_1) \left[ \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{2}{x^4} + \frac{1}{6x^3}(z_0 - z_1)^2 - \frac{1}{30}(z_0^4 + z_1^4) \right. \\
&\quad + \frac{z_0^3 z_1 + z_1^3 z_0 - 4z_0^2 z_1^2}{(z_0 + z_1)} + (z_0 + z_1) \left\{ \frac{4}{x^6} - \frac{1}{4x^4}(z_0 - z_1)^2 \right. \\
&\quad - \frac{1}{120x^3}(z_0 - z_1)^4 + \frac{1}{1440}(z_0^6 + z_1^6 - 9z_0^4 z_1^2 - 9z_0^2 z_1^4 \\
&\quad \left. \left. + 16z_0^3 z_1^3) \right\} \right].
\end{aligned}$$

Nun berücksichtigen wir, daß

$$z_0 - z_1 = i \frac{\alpha}{x} = i(aR)^{1/2}$$

und führen wieder ein

$$(52) \quad z_{0,1} = \xi \pm \frac{i\alpha}{2x},$$

dann wird:

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} F_1(0)F_2(1) - F_2(0)F_1(1) &= -i \frac{\alpha}{x} \left[ \xi + \frac{2}{x^4} - \frac{\alpha^2}{6x^4} + \frac{1}{6} \xi \frac{\alpha^2}{x^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{120} \frac{\alpha^4}{x^4} + 2\xi \left\{ \frac{4}{x^6} + \frac{\alpha^2}{4x^6} - \frac{\alpha^4}{120x^6} + \frac{1}{240} \xi^2 \frac{\alpha^4}{x^4} + \frac{1}{45 \cdot 64} \frac{\alpha^6}{x^6} \right\} \right]. \end{aligned} \right.$$

Ebenso:

$$(54) \quad \left( \frac{df_1}{dx} \right)_0 \left( \frac{df_1}{dx} \right)_1 - \left( \frac{df_2}{dx} \right)_0 \left( \frac{df_1}{dx} \right)_1 = -\frac{1}{x^6} \cdot \frac{x^2}{2} (z_0^2 - z_1^2) = -i \frac{\alpha}{x} \cdot \frac{\xi}{x^4}.$$

$$\begin{aligned}
 (55) \quad & \left\{ F_1(0) \left( \frac{df_2}{dz} \right)_1 + F_1(1) \left( \frac{df_2}{dz} \right)_0 \right\} - \left\{ F_2(0) \left( \frac{df_1}{dz} \right)_1 + F_2(1) \left( \frac{df_1}{dz} \right)_0 \right\} \\
 &= \left\{ \frac{2}{x^4} + \frac{1}{2x^2} (z_0^2 + z_1^2) + \frac{1}{x^6} (z_0 + z_1) - \frac{1}{6x^4} (z_0^3 + z_1^3) \right. \\
 &\quad - \frac{1}{30x^2} (z_0^5 + z_1^5) + \frac{2}{x^8} (z_0 + z_1) - \frac{1}{3x^4} (z_0^3 + z_1^3) \\
 &\quad \left. + \frac{z_0 z_1}{x^4} (z_0 + z_1) - \frac{z_0^2 z_1^2}{6x^2} (z_0 + z_1) \right\} \\
 &- \left\{ -\frac{2}{x^4} + \frac{1}{2x^2} (z_0^2 + z_1^2) + \frac{1}{x^6} (z_0 + z_1) - \frac{z_0 z_1}{2x^4} (z_0 + z_1) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{3x^4} (z_0^3 + z_1^3) - \frac{z_0^2 z_1^2}{6x^2} (z_0 + z_1) - \frac{4}{x^6} (z_0 + z_1) \\
 &\quad \left. + \frac{2}{3x^4} (z_0^3 + z_1^3) - \frac{1}{30x^2} (z_0^5 + z_1^5) \right\} \\
 &= \frac{4}{x^4} + \frac{6}{x^2} (z_0 + z_1) - \frac{8}{2x^4} (z_0 + z_1) (z_0 - z_1)^2 = \frac{4}{x^4} + \frac{6\xi}{x^6} \left( 2 + \frac{\alpha^2}{2} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (56) \quad & \left\{ F_1(0) \left( \frac{df_2}{dz} \right)_0 + F_1(1) \left( \frac{df_2}{dz} \right)_1 \right\} - \left\{ F_2(0) \left( \frac{df_1}{dz} \right)_0 + F_2(1) \left( \frac{df_1}{dz} \right)_1 \right\} \\
 &= \left\{ \frac{2}{x^4} + \frac{1}{2x^2} (z_0^2 + z_1^2) + \frac{1}{x^6} (z_0 + z_1) - \frac{1}{6x^4} (z_0^3 + z_1^3) \right. \\
 &\quad - \frac{1}{30x^2} (z_0^5 + z_1^5) + \frac{2}{x^8} (z_0 + z_1) + \frac{1}{x^4} (z_0^3 + z_1^3) \\
 &\quad \left. - \frac{1}{3x^4} (z_0^3 + z_1^3) - \frac{1}{6x^2} (z_0^5 + z_1^5) \right\} \\
 &- \left\{ -\frac{2}{x^4} + \frac{1}{2x^2} (z_0^2 + z_1^2) + \frac{1}{x^6} (z_0 + z_1) - \frac{1}{2x^4} (z_0^3 + z_1^3) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{3x^4} (z_0^3 + z_1^3) - \frac{1}{6x^2} (z_0^5 + z_1^5) - \frac{4}{x^6} (z_0 + z_1) \\
 &\quad \left. + \frac{2}{3x^4} (z_0^3 + z_1^3) - \frac{1}{30x^2} (z_0^5 + z_1^5) \right\} \\
 &= \frac{4}{x^4} + \frac{6}{x^2} (z_0 + z_1) = \frac{4}{x^4} + \frac{12\xi}{x^6}.
 \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke ergeben in Gleichung (21) eingesetzt für  $\xi$  (wenn wir wieder  $(aR)^{1/2}$  anstatt  $a/x$  schreiben) die Gleichung:

$$(57) \quad \frac{\xi^3}{120} (aR)^{1/2} + \frac{\xi^2}{6} (aR)^{1/2} + \xi \{ 1 + (aR)^2 A \} + (aR)^{1/2} B = 0,$$

wobei  $A$  und  $B$  folgende Funktionen von  $\alpha$  allein sind:

$$(58) \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{1}{\alpha^6} \left( 9 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{60} + \frac{\alpha^6}{45 \cdot 32} - \frac{\operatorname{Cotg} \alpha}{\alpha} (12 + 3\alpha^2) + \frac{12}{\alpha \sin \alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha^6} \left( 9 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{60} + \frac{\alpha^6}{45 \cdot 32} - \frac{1}{\alpha} \operatorname{Tg} \frac{\alpha}{2} \left( 12 + \frac{3\alpha^2}{2} \right) - \frac{3}{2} \alpha \operatorname{Cotg} \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned} \right.$$

$$(59) \left\{ \begin{aligned} B &= \frac{1}{\alpha^4} \left\{ 2 - \frac{\alpha^2}{6} + \frac{\alpha^4}{120} - 4 \left( \frac{\operatorname{Cotg} \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha \sin \alpha} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha^4} \left( 2 - \frac{\alpha^2}{6} + \frac{\alpha^4}{120} - \frac{4}{\alpha} \operatorname{Tg} \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned} \right.$$

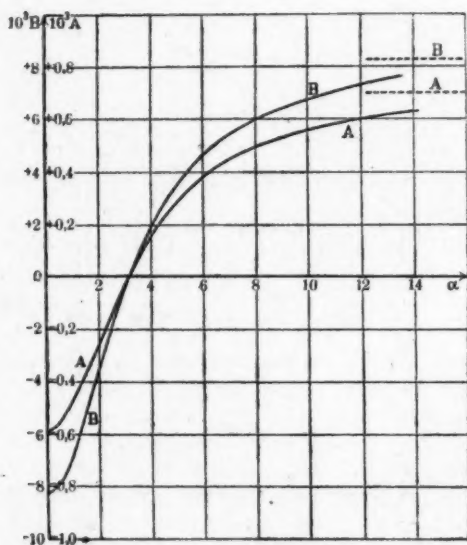


Fig. 10.

Gleichung (57) hat eine kleine Wurzel, welche in 1. Ordnung, wie zu erwarten war,  $\xi = 0$  wird. In 2. und 3. Ordnung wird:

$$(60) \quad \xi = -B(\alpha R)^{1/2} \left\{ 1 - \left( A - \frac{B}{6} \right) (\alpha R)^2 \right\}.$$

Die Funktionen  $A$  und  $B$  sind in Fig. 10 aufgezeichnet; sie sind für kleine  $\alpha$  negativ, für große positiv; die Reihen für kleine  $\alpha$  werden:



$$A = -0,595 \cdot 10^{-3} + 0,122 \cdot 10^{-3} a^2,$$

$$B = -8,33 \cdot 10^{-3} + 1,69 \cdot 10^{-3} a^2.$$

Der Ausdruck (60) konvergiert ausgezeichnet, da der Koeffizient  $A - B/6$  nur von der Größenordnung  $10^{-3}$  ist; man kann also (60) bis etwa  $a R = 15$  sicher benutzen. Die kritische Zahl  $R_*$  ist nun dadurch gegeben, daß der reelle Teil von  $i\beta$  zu Null wird, also nach (12) und (52) durch die Gleichung

$$\xi = \frac{a^2}{(aR)^{3/2}},$$

also in erster Näherung durch

$$(61) \quad R_*^2 = -\frac{1}{B},$$

genauer

$$(62) \quad R_*^2 = -\frac{1}{B} \left\{ 1 - \left( \frac{A}{B} - \frac{1}{6} \right) a^2 \right\}.$$

Für  $a = 0$  wird  $R_*^2 = 120$ , also  $R_* = 10,9$ , für größere  $a$  wächst es; man erhält für

$$a = 1/2 \quad R_* = \sqrt{130} = 11,4$$

$$a = 1 \quad R_* = \sqrt{165} = 12,8$$

$$a = 2 \quad R_* = \sqrt{396} = 19,9$$

Die letzte Zahl liegt schon außerhalb des Gültigkeitsbereiches; das Zusatzglied in (62) macht hierbei 40 Proz. aus; dagegen kann der Wert für  $a = 1$  als voll gültig angesehen werden, da das Zusatzglied dabei nur 10 Proz. ausmacht.

Es ergibt sich also: *Die kleinste kritische Zahl gehört zu den kleinsten Werten von  $a$ ; je langwelliger die Störung, um so leichter erzeugt sie Instabilität. Die kritische Reynoldssche Zahl ist*

$$R_* = 11.$$

Daß sie kleiner ist als die kleinste beobachtete, entspricht dem Ansatz; die angenommene Grundbedingung stellt ja einen Grenzfall dar, in welchem Störungen mehr begünstigt werden, als in Wirklichkeit zu erwarten ist.

#### § 7. Weitere Näherung für große $aR$ .

Um auch die kritische Zahl für Werte von  $a$  zu berechnen, die zwischen 1 und 2,4 liegen, müssen wir von der im § 5 zugrunde gelegten asymptotischen Entwicklung ausgehen und weitere

Näherungen versuchen. Es sei gleich vorweggenommen, daß die Ergebnisse dieser Rechnung nicht sehr befriedigend sind. Die Konvergenz der asymptotischen Entwicklungen reicht nicht immer aus, um sie bis zu den kritischen Werten benutzen zu können.

Die asymptotischen Reihen, deren erste Glieder in (31) angegeben sind, lauten

$$(63) \quad \frac{1}{(\alpha R)^{1/2}} \varphi_1 = e^{i\frac{2}{3}z^{3/2}} \left( z^{-1/4} - \frac{5}{48} i z^{-7/4} \right),$$

$$(64) \quad f_1 = e^{i\frac{2}{3}z^{3/2}} \left\{ \frac{z^{-1/4}}{z - \kappa^2} \left( 1 - \frac{5}{48} i z^{-1/2} \right) - \frac{2 i z^{1/4}}{(z - \kappa^2)^2} \right\}.$$

Die Funktionen

$$\frac{1}{(\alpha R)^{1/2}} \varphi_2 \quad \text{und} \quad f_2$$

erhält man daraus, wenn man nur  $+i$  durch  $-i$  ersetzt. Geht man mit diesen Ausdrücken in die Gleichung (21) ein, so erhält man eine sehr lange, aber nicht unübersichtliche Gleichung, die für kleine  $\alpha R$  keine instabilen Wurzeln mehr hat. Diese Gleichung ist trotzdem nicht zur Berechnung der kritischen Zahl geeignet. Mit fallendem  $\alpha R$  fallen nämlich die vorkommenden  $z$ -Werte rasch und nähern sich der reellen Achse (s. Gleichung (34)); anderseits wächst  $\kappa^2$  auf der reellen Achse, so daß die Wurzeln immer näher an den Punkt  $\kappa^2$  heranrücken, wo die Entwicklung versagt. Die Reihe (63) konvergiert sehr gut und ist bis zu Werten  $z = 2$  sicher zu benutzen; die Reihe (64) konvergiert aber sehr schlecht, so daß  $z - \kappa^2$  sicher keine so kleinen Werte mehr annehmen darf.

Daraus folgt, daß unsere Entwicklungen nur brauchbar sind, wenn die vorkommenden  $z$ -Werte erheblich größer als  $\kappa^2$  sind. Für diesen Fall ist es aber nicht nötig, die Ausdrücke (63) und (64) zu benutzen; man erleichtert sich die rechnerische Arbeit bedeutend, wenn man erst nach Potenzen von  $\kappa^2/z$  entwickelt und die Glieder mit  $(\kappa^2/z)^2$  wegläßt.

$$\text{Nun ist} \quad z \sim (\alpha R)^{1/2} \quad \text{und} \quad \kappa^2 = \frac{\alpha^2}{(\alpha R)^{1/2}},$$

also, da wir uns nur für den Bereich instabiler Schwingungen, d. h. für  $\alpha < 2,4$  interessieren,

$$\frac{\kappa^2}{z} \sim z^{-3/2}.$$

Da die Entwicklungen (63) und (64) nach Potenzen von  $z^{-1/2}$  gehen, könnte man erwarten, daß in zweiter Ordnung  $\kappa^2/z$  noch gar keine Rolle spielt. Die Durchführung zeigt jedoch, daß, solange  $\kappa^2/z$  vernachlässigt wird, eine Änderung der Wurzeln gegenüber der ersten Näherung nicht herauskommt, auch nicht, wenn man zu höheren Gliedern als denen mit  $z^{-1/2}$  fortschreitet.

Aus der bekannten semikonvergenten Reihe der Zylinderfunktionen in Gleichung (22) und der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = -\frac{1}{(\alpha R)^{1/2}} \varphi$$

erhält man nämlich

$$\frac{1}{(\alpha R)^{1/2}} \varphi_1 = e^{i\frac{2}{3}z^{3/2}} z^{-1/2} (1 - 0,104 i z^{-1/2} - 0,0835 z^{-3} + 1,15 i z^{-5/2}),$$

$$f_1 = e^{i\frac{2}{3}z^{3/2}} z^{-1/2} (1 - 2,104 i z^{-1/2} - 7,79 z^{-3} + 41,8 i z^{-5/2})$$

und daraus

$$(65) \quad \frac{df_1}{dz} = e^{i\frac{2}{3}z^{3/2}} i z^{-1/2} (1 - 0,854 i z^{-1/2} - 2,00 z^{-3} + 8,7 i z^{-5/2}),$$

$$(66) \quad F_1 = e^{i\frac{2}{3}z^{3/2}} i z^{1/2} (1 - 0,854 i z^{-1/2} - 2,00 z^{-3} + 8,7 i z^{-5/2}).$$

Aus der Gleichheit der beiden Klammern in (65) und (66) folgt aber, daß durch Mitberücksichtigung der höheren Glieder nur jeder Summand in Gleichung (21) — außer dem letzten, der wegfällt — mit demselben Faktor multipliziert wird; die Wurzeln von (21) werden daher nicht geändert.

Lautet daher die Gleichung (21) in erster Näherung ( $\kappa^2/z = 0$  und  $z^{-1/2} = 0$ )

$$\Phi_0 = 0,$$

so erhält sie bei weiterer Entwicklung die Form

$$(67) \quad \Phi_0 (1 + a z^{-1/2} + \dots) + \frac{\kappa^2}{z} (b + c z^{-1/2} + \dots) + \dots = 0.$$

Solange wir die Glieder mit  $z^{-1/2}$  vernachlässigen, bleiben wir vollkommen im Rahmen der Rechnungen von § 5. Eine Näherung darüber hinaus erhalten wir erst in der Gestalt

$$(68) \quad \Phi_0 + \frac{\kappa^2}{z} (b + c z^{-1/2} - a b z^{-1/2}) = 0.$$

Aus dieser schematischen Darstellung folgt, daß wir in der Entwicklung bis zur Größenordnung  $z^{-1/2}$  gehen müssen, daß aber

nur die Glieder mit  $z^{-1/2}$ ,  $\kappa^2/z$  und  $\kappa^2/z \cdot z^{-1/2}$  von Bedeutung sind.

Wir setzen daher nun:

$$(69) \quad f_1 = e^{i\frac{2}{3}z^{3/2}} z^{-1/2} \left\{ 1 - 2,104 i z^{-1/2} + \frac{\kappa^2}{z} (1 - 6,104 i z^{-1/2}) \right\},$$

was durch Entwicklung aus (64) erhalten werden kann. Dann werden

$$(70) \quad \frac{df_1}{dz} = e^{i\frac{2}{3}z^{3/2}} i z^{-1/2} \left\{ 1 - 0,854 i z^{-1/2} + \frac{\kappa^2}{z} (1 - 3,854 i z^{-1/2}) \right\},$$

$$(71) \quad F_1 = e^{i\frac{2}{3}z^{3/2}} i z^{1/2} \left\{ 1 - 0,854 i z^{-1/2} - i \frac{\kappa^2}{z} z^{-1/2} \right\}.$$

Da  $df_2/dz$  und  $F_2$  die konjugiert komplexen Ausdrücke zu (70) und (71) sind, erhalten wir weiter:

$$\begin{aligned} F_1(0) \cdot F_2(1) - F_2(0) \cdot F_1(1) \\ &= 2i \Im \left[ e^{i\frac{2}{3}(z_0^{3/2} - z_1^{3/2})} z_0^{1/2} z_1^{-1/2} (1 - 0,854 i z_0^{-1/2} - i \kappa^2 z_0^{-1/2}) \right. \\ &\quad \left. (1 + 0,854 i z_1^{-1/2} + i \kappa^2 z_1^{-1/2}) \right] \\ &= 2i \Im \left[ e^{i\frac{2}{3}(z_0^{3/2} - z_1^{3/2})} z_0^{1/2} z_1^{-1/2} (1 - 0,854 i (z_0^{-1/2} - z_1^{-1/2}) \right. \\ &\quad \left. - i \kappa^2 (z_0^{-1/2} - z_1^{-1/2})) \right] \\ &= 2i z_0^{1/2} z_1^{-1/2} \left[ \sin \frac{2}{3} (z_0^{3/2} - z_1^{3/2}) + \cos \frac{2}{3} (z_0^{3/2} - z_1^{3/2}) \right. \\ &\quad \left. (-0,854 (z_0^{-1/2} - z_1^{-1/2}) - \kappa^2 (z_0^{-1/2} - z_1^{-1/2})) \right]. \end{aligned}$$

Wir vereinfachen diesen Ausdruck durch Einführung von Polarkoordinaten in der  $z$ -Ebene:

$$z_0 = r e^{i\varphi} \qquad z_1 = r e^{-i\varphi}.$$

Dann werden

$$\begin{aligned} z_0^n z_1^n &= r^{2n} \\ z_0^n - z_1^n &= 2i r^n \sin n\varphi \\ z_0^n + z_1^n &= 2r^n \cos n\varphi \end{aligned}$$

und daher

$$(72) \quad \left\{ \begin{aligned} &F_1(0) F_2(1) - F_2(0) F_1(1) \\ &= -2r^{1/2} \left[ \Im \left( \frac{4}{3} r^{1/2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) + \Re \left( \frac{4}{3} r^{1/2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot r^{-1/2} \left( 1,708 \sin \frac{3\varphi}{2} + \frac{\kappa^2}{r} \cdot 2 \sin \frac{5\varphi}{2} \right) \right], \end{aligned} \right.$$

ebenso:

$$\begin{aligned}
 (73) \quad & \left\{ \left( \frac{df_1}{dz} \right)_0 \left( \frac{df_2}{dz} \right)_1 - \left( \frac{df_2}{dz} \right)_0 \left( \frac{df_1}{dz} \right)_1 \right. \\
 &= 2i \operatorname{Im} [e^{i\frac{2}{3}(\kappa_0^{3/2} - \kappa_1^{3/2})} z_0^{-1/2} z_1^{-1/2} \{1 - 0,854 i z_0^{-1/2} \\
 &\quad + x^2 z_0^{-1} - 3,854 i x^2 z_0^{-1/2}\} \cdot \{1 + 0,854 i z_1^{-1/2} + x^2 z_1^{-1} \\
 &\quad + 3,854 i x^2 z_1^{-1/2}\}] \\
 &= -2 r^{-1/2} \left[ \operatorname{Sin} \left( \frac{4}{3} r^{3/2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \left( 1 + 2 \frac{x^2}{r} \cos \varphi \right) \right. \\
 &\quad + \operatorname{Cos} \left( \frac{4}{3} r^{3/2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) r^{-1/2} \left( 1,708 \sin \frac{3\varphi}{2} + 7,71 \frac{x^2}{r} \sin \frac{5\varphi}{2} \right. \\
 &\quad \left. \left. + 1,708 \frac{x^2}{r} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (74) \quad & \left\{ F_1(0) \left( \frac{df_1}{dz} \right)_1 - F_2(1) \left( \frac{df_1}{dz} \right)_0 \right\} - \left\{ F_2(0) \left( \frac{df_1}{dz} \right)_1 - F_1(1) \left( \frac{df_2}{dz} \right)_0 \right\} \\
 &= 2i \operatorname{Im} [e^{i\frac{2}{3}(\kappa_0^{3/2} - \kappa_1^{3/2})} z_0^{-1/2} z_1^{-1/2} \{z_0 (1 - 0,854 i z_0^{-1/2} \\
 &\quad - i x^2 z_0^{-1/2}) (1 + 0,854 i z_1^{-1/2} + x^2 z_1^{-1} + 3,854 i x^2 z_1^{-1/2}) \\
 &\quad - z_1 (1 + 0,854 i z_1^{-1/2} + i x^2 z_1^{-1/2}) (1 - 0,854 i z_0^{-1/2} \\
 &\quad + x^2 z_0^{-1} - 3,854 i x^2 z_0^{-1/2})\}] \\
 &= -2 r^{-1/2} \left[ \operatorname{Sin} \left( \frac{4}{3} r^{3/2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \cdot \frac{i\alpha}{x} \left( 1 + 2 \frac{x^2}{r} \cos \varphi \right) \right. \\
 &\quad + \operatorname{Cos} \left( \frac{4}{3} r^{3/2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \cdot r^{-1/2} \left( 1,708 \sin \frac{3\varphi}{2} \cdot \frac{i\alpha}{x} \right. \\
 &\quad \left. \left. + i x^2 2 \cos \frac{3\varphi}{2} - i x^2 \cdot 7,71 \cos \frac{7\varphi}{2} + i x^2 \cdot 1,708 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Der letzte Summand der Gleichung (21),

$$F_1(0) \left( \frac{df_2}{dz} \right)_0 \dots,$$

enthält keine Faktoren

$$\operatorname{Cos} \left( \frac{4}{3} r^{3/2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right);$$

er ist, da  $r$  groß ist, und  $\sin 3\varphi/2$  im betrachteten Bereich nicht klein wird, gegenüber den anderen Gliedern zu vernachlässigen. Auch wird

$$\cos \left( \frac{4}{3} r^{1/2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) = \sin \left( \frac{4}{3} r^{1/2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right)$$

zu setzen sein, und dieser Faktor aus der Gleichung heraustreten. Wir erhalten schließlich durch Einsetzen der Ausdrücke (72), (73) und (74) in (21), wenn wir die Glieder gleich nach dem Schema (67) anordnen:

$$(75) \left\{ \begin{aligned} & [(x^2 r^2 + 1) \sin \alpha - \alpha \cos \alpha] \left( 1 + r^{-1/2} \cdot 1,708 \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \\ & + \frac{x^2}{r} \left[ 2 \cos \varphi (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + r^{-1/2} \left\{ (x^2 r^2 \cdot 2 \sin \frac{5\varphi}{2} \right. \right. \\ & + 7,71 \sin \frac{5\varphi}{2} + 1,708 \sin \frac{\varphi}{2}) \sin \alpha - \frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \varphi} \left( \cos \frac{3\varphi}{2} \right. \\ & \left. \left. + 0,854 \cos \frac{\varphi}{2} - 3,854 \cos \frac{7\varphi}{2} \right) \right] \right\} = 0. \end{aligned}$$

Die erste Näherung ist durch die erste eckige Klammer gegeben; in den Rechnungen von § 5 ist aber auch noch das erste Glied mit  $x^2/r$  berücksichtigt; die Abweichung von dem Verhalten reibungsloser Flüssigkeiten rührt nur von den Gliedern mit  $r^{-1/2}$  her. Berücksichtigen wir nun noch, daß

$$2 r \sin \varphi = (a R)^{1/2},$$

also

$$x^2 r^2 = \frac{a^2}{4 \sin^2 \varphi},$$

so werden die einzelnen Glieder in der schematischen Form (68) unserer Gleichung:

$$(76) \quad \Phi_0 = \left( -\frac{a^2}{4 \sin^2 \varphi} + 1 \right) \sin \alpha - \alpha \cos \alpha$$

$$(77) \quad b = 2 \cos \varphi (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$$

$$(78) \left\{ \begin{aligned} c - ab &= \left( x^2 \cdot \frac{\sin \frac{5\varphi}{2}}{2 \sin^2 \varphi} + 7,71 \sin \frac{5\varphi}{2} + 1,708 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\ &\quad \sin \alpha - \frac{1}{\sin \varphi} \left( \cos \frac{3\varphi}{2} + 0,854 \cos \frac{\varphi}{2} \right. \\ &\quad \left. - 3,854 \cos \frac{7\varphi}{2} \right) \cdot \alpha \cos \alpha - 1,708 \sin \frac{3\varphi}{2} \\ &\quad \cdot 2 \cos \varphi (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \\ &= (a^2 A + B) \sin \alpha - C \alpha \cos \alpha - D (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha). \end{aligned} \right.$$

Der Ausdruck (76) geht mit wachsendem  $\varphi$  von positiven zu negativen Werten. Der Nullpunkt gibt die erste Näherung der Hauptgleichung (75); solange  $\kappa^2/r$  vernachlässigt ist, haben wir Instabilität bei jedem positiv reellem Teil von  $\alpha$ , also für  $\varphi < 90^\circ$ . Fig. 11 zeigt  $\varphi$  in Abhängigkeit von  $\alpha$ ; bei  $\alpha = 2,4$  wird  $\varphi$  gerade  $= 90^\circ$ , und zwar ist dies eine Doppelwurzel; für größere  $\alpha$  gibt es kein reelles  $\varphi$  mehr.

(77) ist stets negativ; berücksichtigten wir also, in § 5 nur (76) und (77), wie es zur Annäherung an den reibungslosen Zustand geboten war, so rückten die Wurzeln gegenüber unserer jetzigen Näherung zu etwas kleinerem  $\varphi$ , d. h. physikalisch zu größeren logarithmischen Inkrementen der Schwingung, also zu stärker anwachsenden Schwingungen.

Ist nun (78) gleichfalls negativ, so rückt  $\varphi$  gegenüber der Näherung des § 5 zu noch kleineren Werten, als es den reibungslosen Flüssigkeiten entspricht; ist (78) positiv, so wird  $\varphi$  gegenüber den reibungslosen Flüssigkeiten größer, die Strömung also weniger instabil. Es entspräche dem physikalischen Gefühl, nur das letztere Verhalten zu erwarten; die Rechnung zeigt aber etwas anderes.

Die folgende Tabelle gibt die numerischen Werte der in (78) stehenden Funktionen von  $\varphi$ :

$\varphi$	$A$	$B$	$C$	$D$
$55^\circ$	0,502	6,01	5,56	1,94
$60^\circ$	0,333	4,71	4,71	1,71
$65^\circ$	0,183	3,24	3,51	1,43
$70^\circ$	0,049	1,65	2,19	1,13
$75^\circ$	- 0,070	0,03	0,82	0,82
$80^\circ$	- 0,176	- 1,54	- 0,53	0,52
$85^\circ$	- 0,270	- 3,06	- 1,82	0,24
$90^\circ$	- 0,354	- 4,24	- 2,83	0,00

Berechnet man daraus den Ausdruck (78), so erweist er sich für alle vorkommenden  $\alpha$  zwischen  $\varphi = 60^\circ$  und  $\varphi = 80^\circ$  negativ. Es zeigt sich also das paradoxe Resultat, daß für alle Störungen von  $\alpha = 0$  bis etwa  $\alpha \sim 2$  zunächst bei fallendem  $R$  eine noch höhere Neigung zur Instabilität vorhanden ist, als bei reibungslosen Flüssigkeiten. Je mehr  $R$  fällt, um so mehr rückt infolge des Wachsens von  $\kappa^2$ ,  $\varphi$  zu kleineren Werten und kommt schließlich in ein Bereich, wo (78) positiv wird; doch liegt dies weit außerhalb der Gültigkeitsgrenze unserer Gleichung.



Es gelingt daher nicht, mit Hilfe dieser Näherung die kritische Zahl im Bereich  $\alpha < 2$  zu berechnen.

Unser Ergebnis ist paradox; da aber eine Strömung reibender Flüssigkeit prinzipiell etwas ganz anderes ist als eine Strömung reibungsloser Flüssigkeit, kann man es nicht als absurd ansehen; absurd wäre es wohl, wenn eine Störung in reibender

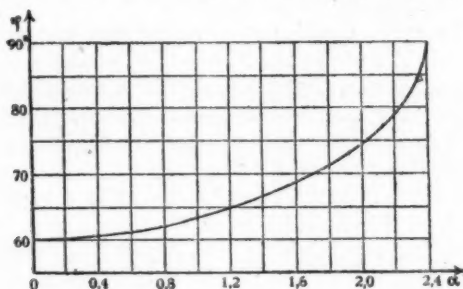


Fig. 11.

Flüssigkeit zur Instabilität führen würde, die in reibungsloser Flüssigkeit nicht dazu imstande ist. Dies ist nun nicht der Fall; Fig. 11 zeigt, daß für  $\alpha \sim 2,4$   $\varphi$  in die Nähe von  $90^\circ$  rückt; dort aber wird (78) positiv; solche Störungen zeigen also das besprochene paradoxe Verhalten nicht. Wir können sogar in diesem Bereich die kritische Zahl berechnen:

Wir entwickeln zu diesem Zweck in (75) die trigonometrischen Funktionen in der Umgebung von  $\varphi = 90^\circ$ , setzen also

$$\varphi = 90^\circ - \varepsilon,$$

dann wird

$$\cos \varphi = \varepsilon \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad \text{usw.}$$

$$r = \frac{(\alpha R)^{1/2}}{2 \sin \varphi} = \frac{(\alpha R)^{1/2}}{2} \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right).$$

Entwickeln wir die Ausdrücke (76) und (77), so erhalten wir:

$$(79) \quad \Phi_0 = \left( \frac{\alpha^2}{4} + 1 \right) \sin \alpha - \alpha \cos \alpha + \varepsilon^2 \frac{\alpha^3}{4} \sin \alpha$$

$$(80) \quad b = \varepsilon \cdot 2 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha).$$

Bleiben wir im Rahmen des § 5, indem wir (78) vernachlässigen, so ergibt sich:

$$(81) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon^2 \cdot \frac{\alpha^2}{4} \sin \alpha + \left( \frac{\alpha^2}{4} + 1 \right) \sin \alpha - \alpha \cos \alpha \\ + \varepsilon \cdot 4 \frac{\kappa^2}{(\alpha R)^{1/2}} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) = 0 \end{aligned} \right.$$

$$(82) \quad \varepsilon = \frac{4}{\alpha^2} (\alpha \cotg \alpha - 1) \cdot \frac{2 \kappa^2}{(\alpha R)^{1/2}} \pm \frac{2}{\alpha} \sqrt{\alpha \cotg \alpha - 1 - \frac{\alpha^2}{4}}$$

also in Übereinstimmung mit früher stets zwei reelle Werte von  $\varepsilon$ .

Berücksichtigen wir aber (78), so kommt davon in erster Ordnung nur das Glied ohne  $\varepsilon$  in Betracht; dieses ist:

$$(83) \quad c - ab = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ - \left( \frac{\alpha^2}{2} + 6,00 \right) \sin \alpha + 4,00 \alpha \cos \alpha \right\}.$$

Das von  $\varepsilon$  freie Glied in (81) wird nun vermehrt durch das Glied

$$+ \frac{\kappa^2}{r} r^{-1/2} (c - ab) = \frac{2 \alpha}{R} \cdot \frac{2 \sqrt{2}}{(\alpha R)^{1/2}} (c - ab).$$

Unter der Wurzel in (82) erscheint der Ausdruck:

$$(84) \quad \alpha \cotg \alpha - 1 - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{4 \alpha^{1/2}}{R^{1/2}} \left( \frac{\alpha^2}{2} + 6,00 - 4,00 \alpha \cotg \alpha \right).$$

Der Klammerausdruck ist für  $\alpha > 2$  negativ; daher geht der Radikant in (82), wenn  $R$  fällt, von positiven zu negativen Werten über. Dann wird aber  $\varepsilon$  komplex; es gibt also keine reellen  $\varphi$  mehr, welche unsere Hauptgleichung lösen. Je mehr man die Wurzel als von erster Ordnung gegenüber dem Glied mit  $\kappa^2/(\alpha R)^{1/2}$  ansehen kann, um so mehr wird  $\varepsilon$  rein imaginär und damit der reelle Teil von  $z_{0,1}$  Null. Das bedeutet physikalisch, daß die Schwingung gedämpft und in ihrem Charakter den in § 5 beschriebenen Schwingungen mit großem  $\alpha$  ähnlich ist. Somit gibt das Verschwinden des Ausdrucks (84) eine Abschätzung für die kritische Zahl. Die folgende Tabelle gibt einige Zahlenwerte:

$\alpha$	$\alpha \cotg \alpha - 1 - \frac{\alpha^2}{4}$	$\frac{\alpha^2}{2} + 6,00 - 4,00 \alpha \cotg \alpha$	$R_{\kappa}$
2,4	0,000	-0,88	$\infty$
2,35	0,0125	-0,81	54
2,30	0,0242	-0,74	32
2,25	0,0350	-0,67	24
2,20	0,0442	-0,60	19

Die Abschätzung dürfte bei  $a = 2,35$  gut sein, vielleicht auch noch bei  $a = 2,30$ ; bei den anderen wird  $(aR)^{1/2}$  bereits zu klein. Wir sehen also, daß sich die kritischen Zahlen in der Größenordnung gut an die in § 6 gerechneten für kleine  $a$  an-

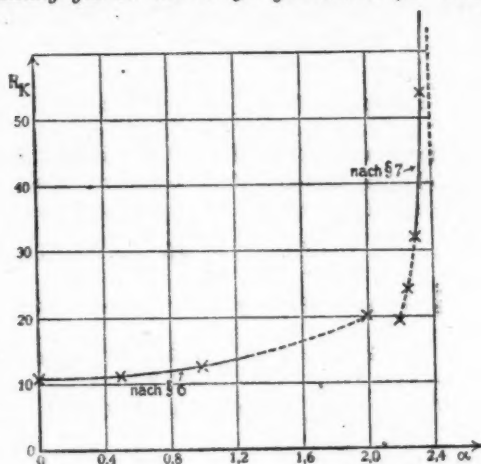


Fig. 12.

schließen (s. Fig. 12). In der Lücke, welche wir im Bereich zwischen  $a = 1$  und  $a = 2,3$  lassen mußten, werden kaum andere Werte auftreten; wir sind daher wohl berechtigt, den in § 6 gefundenen kritischen Wert  $R_K = 11$  als den niedrigsten anzusehen.

#### § 8. Die Oberschwingungen.

Bezüglich der Oberschwingungen, von welchen in den drei letzten Paragraphen nicht die Rede war, können wir uns hier sehr kurz fassen; denn ihre Diskussion geht in nichts über die frühere Arbeit hinaus.

Wir sahen, daß die zu den Oberschwingungen gehörigen  $z$ -Werte für kleine  $aR$  in unmittelbarer Nähe der negativ reellen  $z$ -Achse liegen; diese Achse bildet die Grenze der Gebiete II und III auf der  $z$ -Ebene, in welchen die Ausdrücke für die Zylinderfunktionen verschieden lauten (Fig. 4). Infolge des in § 2 der früheren Arbeit Gesagten werden dieselben Funktionen für das Argument  $z_1$  anders ausgedrückt als für

das Argument  $z_0$ . Wir müssen hier ganz in der gleichen Weise vorgehen, wie bei den Formeln (28) in § 3 der früheren Arbeit. Danach werden

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\alpha R)^{1/2}} \varphi_1(0) &= z_0^{-1/2} e^{i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} & \frac{1}{(\alpha R)^{1/2}} \varphi_1(1) &= z_1^{-1/2} (e^{i \frac{2}{3} z_1^{3/2}} + i e^{-i \frac{2}{3} z_1^{3/2}}) \\ \frac{1}{(\alpha R)^{1/2}} \varphi_2(0) &= z_0^{-1/2} (e^{i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} - i e^{-i \frac{2}{3} z_0^{3/2}}) & \frac{1}{(\alpha R)^{1/2}} \varphi_2(1) &= z_1^{-1/2} e^{i \frac{2}{3} z_1^{3/2}} \end{aligned}$$

Wir haben daher in der Gleichung (21) anstatt der Ausdrücke (32) die folgenden einzusetzen:

$$\begin{aligned} (85) \quad \begin{cases} F_1(0) = i z_0^{1/2} e^{i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} & F_1(1) = i z_1^{1/2} (e^{i \frac{2}{3} z_1^{3/2}} - i e^{-i \frac{2}{3} z_1^{3/2}}) \\ F_2(0) = i z_0^{1/2} (e^{i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} + i e^{-i \frac{2}{3} z_0^{3/2}}) & F_2(1) = i z_1^{1/2} e^{i \frac{2}{3} z_1^{3/2}} \end{cases} \\ (86) \quad \begin{cases} \left( \frac{d f_1}{d x} \right)_0 = \frac{i z_0^{1/2}}{z_0 - x^2} e^{i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} & \left( \frac{d f_1}{d x} \right)_1 = \frac{i z_1^{1/2}}{z_1 - x^2} (e^{i \frac{2}{3} z_1^{3/2}} - i e^{-i \frac{2}{3} z_1^{3/2}}) \\ \left( \frac{d f_2}{d x} \right)_0 = \frac{i z_0^{1/2}}{z_0 - x^2} (e^{i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} + i e^{-i \frac{2}{3} z_0^{3/2}}) & \left( \frac{d f_2}{d x} \right)_1 = \frac{i z_1^{1/2}}{z_1 - x^2} e^{i \frac{2}{3} z_1^{3/2}} \end{cases} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Gleichung

$$(87) \quad \left\{ \left[ 1 + \frac{1}{x^2 (z_0 - x^2) (z_1 - x^2)} \right] \sin \alpha + \frac{i}{x} \left\{ \frac{1}{z_1 - x^2} - \frac{1}{z_0 - x^2} \right\} \cos \alpha \right. \\ \left. \cdot [2 \sin \frac{\alpha}{3} (z_0^{3/2} - z_1^{3/2}) + e^{-i \frac{2}{3} (z_0^{3/2} + z_1^{3/2})}] \right\} = 0.$$

Die erste Klammer ist dieselbe, wie in (33); daraus folgt, daß die Diskussion der ersten Oberschwingung in § 5 auch zurecht besteht, wenn  $z_0$  und  $z_1$  in den Gebieten II und III liegen.

Die Wurzeln der zweiten Klammer haben alle Eigenschaften der Wurzeln in der früheren Arbeit. Für kleine  $\alpha R$ , wenn  $z_0$  und  $z_1$  in der Nähe der negativ reellen  $z$ -Achse liegen, wird der Summand  $e^{-i \frac{2}{3} (z_0^{3/2} + z_1^{3/2})}$  sehr klein, und wir kommen auf die Gleichung (29) zurück. Für größere  $\alpha R$  rücken  $z_0$  und  $z_1$  tiefer in die Gebiete II und III der Fig. 4 hinein. Es können dann 2 Fälle eintreten: Entweder sind  $z_0$  und  $z_1$  konjugiert komplex, dann bleibt der Sinus von der Größenordnung 1, und die Schwingungen gehören dem 2. Typus an; oder das Argu-

ment des Sinus wird komplex; dann überwiegt entweder  $e^{i\frac{4}{3}(z_0^{3/2} - z_1^{3/2})}$  bei weitem  $e^{-i\frac{4}{3}(z_0^{3/2} - z_1^{3/2})}$  oder umgekehrt. Dann haben wir den 3. Typus von Schwingungen, bei welchem sich die ganze Schwingung mit wachsendem  $a R$  mehr und mehr in eine bestimmte Schicht konzentriert. Die Gleichungen lauten dann

$$(88) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{und} \\ e^{i\frac{4}{3}z_0^{3/2}} = -i \\ e^{i\frac{4}{3}z_1^{3/2}} = +i. \end{array} \right.$$

Sie stimmen vollständig überein mit den Gleichungen (87) und (88) in § 4 der alten Arbeit; nur daß diese bloß für kleine  $z$  galten, die jetzigen allgemein. Für große  $a R$  finden wir also alle Oberschwingungen unabhängig von der veränderten Grenzbedingung wieder, was nach dem Charakter des 3. Schwingungstypus auch zu erwarten war.

Es ist nun noch zu zeigen, daß wirklich die 3. und 4. Oberschwingung unseres jetzigen Systems die Rolle der früheren Grundschwingung und 1. Oberschwingung übernehmen, also für unendliche  $a R$  zu den Werten

$$\frac{4}{3} z_0^{3/2} = \frac{3\pi}{2} \quad \text{und} \quad \frac{4}{3} z_1^{3/2} = \frac{5\pi}{2}$$

gehören, während die jetzige Grundschwingung und erste Oberschwingung mit wachsendem  $R$  zu kleinen Werten von  $z_{0,1}$  rücken, wo die Gleichung versagt.

Dies geschieht durch numerische Verfolgung der Wurzeln. Zu diesem Zweck führen wir wieder Polarkoordinaten in der  $z$ -Ebene ein, müssen aber diesmal setzen (siehe alte Arbeit Gleichung (33)):

$$z_0 = r e^{i\varphi} \quad z_1 = r e^{i(2\pi - \varphi)}.$$

Es wird dann:

$$(89) \quad \Phi = 2 \sin \left\{ \frac{4}{3} r^{3/2} \cos \frac{3\varphi}{2} \right\} + e^{\frac{4}{3} r^{3/2} \sin \frac{3\varphi}{2}} = 0.$$

Der Verlauf des Ausdrucks (89) ist in Fig. 13 für  $(a R)^{1/2} = 1, 1.5, 2, 2.5$  und 3 dargestellt; man sieht daraus, wie die beiden ersten Wurzeln in einem Gebiet zusammenrücken, in welchem die Gleichung keine Gültigkeit mehr hat. Die anderen Wurzeln

rücken auf der reellen Achse bei größerem  $(\alpha R)^{1/2}$  zusammen und gehen in die Wurzeln von (88) über.

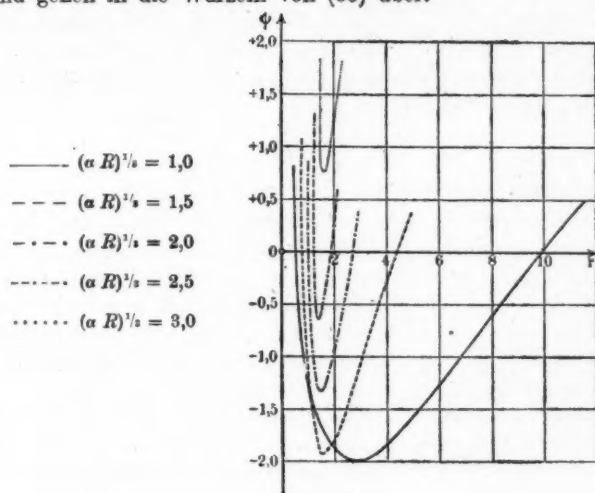


Fig. 13.

### § 9. Erzwungene Schwingungen.

Wir können den physikalischen Inhalt der vorgetragenen Theorie auch in etwas anderer Weise aussprechen, wenn wir die Störung nicht als eine freie Schwingung ansehen, deren zeitlicher Verlauf zu diskutieren ist, sondern als eine erzwungene Schwingung, deren Amplitude wir berechnen wollen. Wenn die Wand Erschütterungen ausgesetzt ist, so überträgt sie Druckkräfte auf die äußerste Schicht der Flüssigkeit; dabei ist diese äußerste Schicht aber nicht mehr die ungestörte gerade Wand, sondern irgendwie deformiert. Wir haben dann, wie in der Wellenlehre, nicht mehr 2 Grenzbedingungen an einer bestimmten Stelle, sondern 3 Grenzbedingungen an einer noch unbekannten Stelle, die eben durch die eine überschüssige Grenzbedingung bestimmt wird. An der Grenze Wand-Flüssigkeit muß 1. die Geschwindigkeitskomponente längs der Wand verschwinden, 2. die Geschwindigkeitskomponente normal zur Wand gleich der Bewegung der Wand selbst sein, 3. der Flüssigkeitsdruck gleich dem von der Wand ausgeübten Druck sein. Die erste Bedingung führt auf

$$(90) \quad \frac{df}{d\eta} = 0$$

an der ungestörten Wand, da die Abweichung dieser Komponente von der  $x$ -Geschwindigkeit nur einen  $\cos$ -Fehler bedeutet. Die beiden andern Bedingungen lauten, wenn der Index  $w$  sich auf die Wand bezieht,

$$(91) \quad \begin{aligned} p &= p_w \\ f &= f_r \end{aligned}$$

Nun gibt die Beschaffenheit der Wand eine Beziehung zwischen  $p_w$  und  $f_r$  — etwa  $p_w + c f_r = 0$ , aber möglicherweise auch komplizierter —; ferner gibt die Hydrodynamik die Beziehung (10) zwischen  $p$  und  $f$ ; daraus folgt eine Grenzbedingung — etwa  $p + c f = 0$  —, in der nur  $f$  mit seinen Ableitungen vorkommt.

Die Beziehung zwischen  $p_w$  und  $f_r$  und damit die richtige Grenzbedingung, welche die Wandbeschaffenheit berücksichtigt, ist unbekannt; der früher behandelte Grenzfall entsprach einer ganz starren Wand —  $c = \infty$  —, der jetzige einer ganz leicht beweglichen —  $c = 0$ .

Nun setzen wir  $p_w$  und  $f_r$  als gegebene äußere Störungen gleiche

$$(92) \quad 1 \cdot e^{i(\beta_0 r - a \xi)}$$

an, wobei  $\beta_0$  eine rein reelle Konstante ist. Mit den Bezeichnungen des § 3 wird dann eine Bewegung, welche (90) erfüllt und (91) im früheren Grenzfall gerecht wird, dargestellt durch

$$(93) \quad f = \frac{(f_1^*(0) - f_1^*(1)) f_2^*(\eta) - (f_2^*(0) - f_2^*(1)) f_1^*(\eta)}{f_1^*(0) f_2^*(1) - f_2^*(0) \cdot f_1^*(1)}.$$

Da es kein reelles  $\beta_0$  gibt, für welches der Nenner in (93) verschwindet, wird  $f$  in allen Fällen für alle  $\eta$  einen endlichen Wert haben und je nach der Größe von  $a$  und  $R$  eine Bewegung vom 1., 2., oder 3. Typus darstellen.

Im Grenzfall dieser Arbeit, in welchem an den beiden Wänden

$$p = 1 e^{i(\beta_0 r - a \xi)}$$

ein muß, wird:

$$94 \quad f = \frac{(F_1^*(0) - F_1^*(1)) f_2^*(\eta) - (F_2^*(0) - F_2^*(1)) f_1^*(\eta)}{F_1^*(0) F_2^*(1) - F_2^*(0) F_1^*(1)}.$$

Der Nenner dieses Ausdrucks wird aber dann Null, wenn  $\beta_0 = a/2$ , wenn sich also die Störung mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit fortpflanzt, wenn ferner  $a < 2,4$  und  $R$  den zu dem betreffenden  $a$  gehörigen kritischen Wert hat.



*In diesem Falle führt eine unendlich kleine Erschütterung der Wände zu einer endlichen Bewegung im Innern der Flüssigkeitsströmung und somit zur Entstehung der Turbulenz.*

Jede beliebige Störung des Druckes an der Wand, die mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit fortschreitet, kann in Partialschwingungen (92) zerlegt werden. Bei bestimmter Reynoldsscher Zahl wird aber der Ausdruck (94) nur für ein bestimmtes  $a$  unendlich. Man könnte also nach dieser Auffassung erwarten, daß bei bestimmtem  $R$  nur Störungen von bestimmter räumlicher Frequenz herausgehoben werden, daß also in der turbulenten Strömung ganz bestimmte periodische Erscheinungen hervortreten; solche periodische Erscheinungen sind ja in den Kármánschen Wirbelstraßen<sup>1)</sup> bekannt, welche sich hinter festen Körpern in der Flüssigkeit ausbilden. Stellt man sich vor, daß auch die Turbulenz bei Strömungen die Form solcher Wirbelstraßen annimmt, so kann man auch verstehen, daß der Widerstand nicht einfach proportional dem Quadrat der Strömungsgeschwindigkeit geht. Nach v. Kármán ist der Widerstand nämlich  $\sim v^2/a$ ; nach unsrer Auffassung wäre aber  $a$  nicht konstant, wie bei der Bewegung hinter festen Körpern, sondern um so größer, je größer  $R$  ist. Danach müßte der Widerstandskoeffizient bei wachsendem  $R$  fallen, was tatsächlich der Fall ist.

#### **Zusammenfassung.**

1. Früher wurde die Stabilität einer laminaren Strömung reibender Flüssigkeit gegen eine unendlich kleine Schwingung, die an der Wand verschwindet, festgestellt.

2. Nun wird eine von der Wand ausgehende Störung behandelt; dabei ist es nicht eindeutig, welche Grenzbedingung eine solche Störung an der Wand erfüllen muß. Die frühere wird als der eine Grenzfall — unendlich widerstehende Wand — angesehen; der entgegengesetzte Grenzfall — unendlich nachgiebige Wand — wird durch die Grenzbedingung verschwindenden Drucks gegeben. Dieser Fall wird durchgeführt. Dabei kann man die Störung als freie oder als erzwungene Schwingung auffassen.

1) Th. von Kármán u. H. Rubach, Phys. Zeitschrift, 13. Jahrgang 1912. p. 49.

3. Es zeigt sich dabei absolute Stabilität der Hauptströmung bei kleiner Reynoldsscher Zahl, Instabilität bei großer Reynoldsscher Zahl, wenn die räumliche Frequenz  $\alpha$  der Störung nicht einen Grenzwert ( $\alpha = 2,4$ ) übersteigt, also Instabilität gegen Störungen von großer Wellenlänge.

4. Die kritische Reynoldssche Zahl hängt von  $\alpha$  ab; sie liegt um so tiefer, je kleiner  $\alpha$  ist; ihr kleinster Wert ist 11. Daß dieser Wert unter dem beobachteten ( $\sim 400$ ) liegt, entspricht dem Charakter des Ansatzes, der einen Grenzfall darstellt.

5. Der Verlauf der Stromlinien wird beschrieben: Bei kleiner Reynoldsscher Zahl ergibt sich ein System von Schwingungen, wie bei der ruhenden Flüssigkeit; die Strömung führt als Ganzes eine Grundschwingung aus, in ein- und mehrfacher Unterteilung Oberschwingungen. Bei großer Reynoldsscher Zahl verlaufen die Schwingungen genau wie in einer reibungslosen Flüssigkeit; nur in einer Grenzschicht, die mit wachsender Reynoldsscher Zahl immer kleiner wird, weicht die Bewegung so davon ab, daß die Grenzbedingungen richtig erfüllt sind.

6. Bei kleiner Reynoldsscher Zahl weicht das hier beschriebene System physikalisch nicht von dem im anderen Grenzfall errechneten ab; bei großer Reynoldsscher Zahl übernimmt aber die 2. Oberschwingung die Rolle der Grundschwingung im anderen Grenzfall. Die 2. und die höheren Oberschwingungen stellen Bewegungen dar, die mit wachsender Reynoldsscher Zahl mehr und mehr in bestimmten Strömungsschichten konzentriert sind. Die Grundschwingung und erste Oberschwingung geben ein ähnliches Bild bei großer Frequenz der Störung, bei  $\alpha < 2,4$  hingegen sind sie Schwingungen der ganzen Strömung, von welchen die eine im Sinn des Geschwindigkeitsanstiegs in der Hauptströmung verzerrt und gedämpft ist, die andere im entgegengesetzten Sinn verzerrt ist, der Hauptströmung gewissermaßen widerstrebt und zur Instabilität führt.

7. Bei großen Reynoldsschen Zahlen findet man das paradoxe Ergebnis, daß die instabilisierende Störung unter Umständen auf einer reibenden Flüssigkeit stärker anwächst als auf einer reibungslosen. Aber nie kann eine Störung die reibende Strömung instabil machen, die nicht auch bei reibungsloser Flüssigkeit dazu imstande ist.

(Eingegangen 14. März 1919.)

3. *Die Rolle des Kristallwassers und die Struktur der Alaune. (Antwort an Hrn. L. Vegard); von Clemens Schaefer und Martha Schubert.*

In diesen Annalen<sup>1)</sup> haben wir vor kurzem einige Bemerkungen veröffentlicht, die sich auf eine gleichnamige Arbeit der Herren Vegard und Schjelderup<sup>2)</sup> beziehen. Einerseits haben wir darin ein auf die Rolle des Kristallwassers bezüglichen Resultat dieser Herren für uns reklamiert, andererseits Zweifel an der Richtigkeit des von ihnen angegebenen Alaunmodells begründet. Darauf hat Hr. Vegard kürzlich geantwortet.<sup>3)</sup>

Er gesteht zu, daß wir bezüglich des Kristallwassers „eine ähnliche Ansicht“<sup>4)</sup> geäußert haben, lehnt jedoch die Anerkennung unserer Priorität ab, da er „in den ausgeführten Versuchen keinen Beweis für die Richtigkeit dieser Anschauung“ habe finden können. Er referiert dann kurz die Ergebnisse unserer Arbeit „Zum optischen Verhalten des Kristallwassers“<sup>5)</sup> und knüpft nun seinerseits daran kritische Bemerkungen über die Sicherheit unserer Resultate.

Schließlich hält Hr. Vegard sein Alaunmodell aufrecht; er anerkennt zwar, daß, worauf wir hingewiesen hatten, keine konstante  $\text{SO}_4$ -Gruppe in demselben auftritt, er erklärt sogar, eine solche sei mit seinen und Schjelderups Messungen unverträglich, — und geht nun seinerseits dazu über, die Resultate unserer weiteren Arbeit „Kurzwellige ultrarote Eigenfrequenzen der Sulfate und Karbonate“<sup>6)</sup>, aus denen die Existenz

1) Cl. Schaefer u. M. Schubert, Ann. d. Phys. 55. p. 397. 1918 (im folgenden als Arbeit III zitiert).

2) L. Vegard u. Schjelderup, ibid. 54. p. 146. 1917.

3) L. Vegard, ibid. 58. p. 291. 1919.

4) Wieso nur „ähnlich“? Unser Resultat ist dem Vegard-Schjelderupschen nicht nur ähnlich, sondern mit demselben identisch!

5) Cl. Schaefer u. M. Schubert, ibid. 50. p. 339. 1916 (Arbeit II).

6) Cl. Schaefer u. M. Schubert, ibid. 50. p. 283. 1916 (Arbeit I).

einer  $\text{SO}_4$ -Gruppe bei den Sulfaten deutlich hervorgeht, zu bezweifeln.

Diese Sachlage zwingt uns zu unserem Bedauern zu einer nochmaligen kurzen Darlegung.

#### I. Die Kristallstruktur der Alaune, die Existenz einer $\text{SO}_4$ -Gruppe.

Diese Frage läßt sich verhältnismäßig kurz erledigen.

Denn wie oben erwähnt, erkennt Hr. Vegard die von uns hervorgehobene Tatsache, daß in seinem Modell eine konstante  $\text{SO}_4$ -Gruppe gar nicht auftritt, ausdrücklich als richtig an; er bekräftigt sie sogar, indem er behauptet, eine solche sei mit seinen Messungen unverträglich. In diesem letzteren Punkte ist nun Hr. Vegard zweifellos im Irrtum; denn fast gleichzeitig mit unserer Kritik — aber gänzlich unabhängig davon — hat Hr. Niggli<sup>1)</sup> die genannte Arbeit der Herren Vegard und Schjelderup zum Ausgangspunkte einer eindringenden Untersuchung gemacht. Er kommt dabei zu dem Resultat, einerseits, daß das Vegard-Schjelderupsche Alaunmodell falsch ist — genau wie wir es behauptet haben —, anderseits zeigt er, über uns hinausgehend, daß die Annahme einer konstanten  $\text{SO}_4$ -Gruppe mit Vegards Messungen durchaus vereinbar ist und gibt dann das richtige Alaunmodell an.

Hr. Vegard hat diese Arbeit des Hrn. Niggli offenbar nicht gekannt, sonst würde er seine jetzige Behauptung nicht haben machen können.

Wie in der Einleitung bereits erwähnt, bezweifelt Hr. Vegard — notgedrungen, da er die Richtigkeit unserer Kritik an seinem Alaunmodell nicht zugeben will —, daß aus unsern Messungen an den Sulfaten die Existenz einer  $\text{SO}_4$ -Gruppe hervorgehe.

Die Tatsachen, auf die wir unsere Behauptung stützen, sind die folgenden: *Alle Sulfate besitzen bei etwa  $9\ \mu$  und  $16\ \mu$  Stellen selektiver Reflexion. Die Lage dieser Maxima ist fast völlig unabhängig vom Metallion.* Daher können sie nicht — wie Hr. Vegard uns irrtümlich unterschiebt — Schwingungen des ganzen (als starr gedachten)  $\text{SO}_4$ -Ions gegen das Metallion zukommen, weil in diesem Falle eine starke Abhängigkeit der

1) P. Niggli, Phys. Zeitschr. 19. p. 225. 1918.

Wellenlänge der Eigenschwingungen vom Atomgewicht des Metallions zu erwarten wäre; vielmehr sind es „innere“ Schwingungen der  $\text{SO}_4$ -Gruppe, d. h. solche der einzelnen Massen dieser Gruppe gegeneinander.

Daß es sich nach unserer Auffassung um solche inneren Schwingungen handelt, haben wir ausdrücklich z. B. p. 336 unserer Arbeit I hervorgehoben; diese Auffassung wird, soweit uns bekannt ist, auch von allen auf diesem Gebiete arbeitenden Forschern als richtig anerkannt.<sup>1)</sup>

Wir müssen sehr bedauern, daß Hr. Vegard sich nicht veranlaßt gesehen hat, unsere Arbeit sorgfältig zu lesen, sonst wäre dieses handgreifliche Mißverständnis auf seiner Seite gar nicht möglich gewesen.

## II. Die Rolle des Kristallwassers.

Die vorhin erwähnten Reflexionsmaxima der Sulfate, ebenso die der Karbonate, Nitrate<sup>2)</sup>, Bromate, Chlorate, Jodate, Metasilikate<sup>3)</sup> zerfallen in Partialschwingungen, die eine ganz bestimmte Zuordnung zu den Polarisationsrichtungen des einfallenden Lichtes zeigen. Darauf beruht unser weiterer Schluß, daß diese inneren Schwingungen der  $\text{SO}_4$ -,  $\text{CO}_3$ -,  $\text{NO}_3$ -,  $\text{BrO}_3$ -,  $\text{ClO}_3$ -,  $\text{JO}_3$ -,  $\text{SiO}_3$ -Gruppen gleichzeitig Raumbitterschwingungen sind, — im besten Einklange mit sämtlichen neueren Erkenntnissen über die Kristallstruktur.

Unser Schluß bezüglich der Rolle des Kristallwassers beruht nun gerade darauf, daß die  $\text{H}_2\text{O}$ -Gruppe des Kristallwassers genau dieselben Eigenschaften zeigt, wie die oben erwähnten andern Gruppen.<sup>4)</sup>

In der Tat: Einmal treten in allen wasserhaltigen Kristallen die Eigenschwingungen des freien Wassers bei etwa  $3,2\ \mu$  und  $6,2\ \mu$  auf<sup>5)</sup>, nur unwesentlich durch Eintritt in die Verbindung verschoben. Zweitens zerlegen sich diese Eigen-

1) Z. B. Liebisch u. H. Rubens, Sitz.-Ber. d. Berl. Akad. p. 216. 1919.

2) Cl. Schaefer u. M. Schubert, Ann. d. Phys. 55. p. 577. 1918 (Arbeit IV).

3) Erscheint demnächst in den Annalen.

4) Arbeit II. p. 342 ff.

5) Diese Eigenschwingungen treten auch in Absorption beim  $\text{H}_2\text{O}$ -Dampf auf.

frequenzen bei den doppeltbrechenden Kristallen in zwei bzw. drei Partialfrequenzen, die eine bestimmte Zuordnung zu den Polarisationsrichtungen des einfallenden Lichtes aufweisen — beides ganz genau so, wie bei den oben erwähnten Gruppen. Unser Schluß ist demnach ganz unausweichlich, daß auch diese Eigenfrequenzen gleichzeitig innere Schwingungen der Gruppe  $H_2O$  und Raumgitterschwingungen sind, d. h. daß auch die  $H_2O$ -Gruppe als wesentlicher Bestandteil ins Raumgitter eintritt.

Deshalb halten wir unseren Prioritätsanspruch gegen die Herren Vegard und Schjelderup vollkommen aufrecht.

Hrn. Vegards Argumentation gegen die Bündigkeit unseres Schlusses ist im einzelnen folgende:

1. Erstens bestreitet er, wie schon oben gesagt, die Existenz bestimmter  $SO_4$ -, . . . usw.-Gruppen, um unserm Analogieschlusse auf die  $H_2O$ -Gruppe den Boden zu entziehen. Aber wie oben dargelegt, beruht dieser Teil der Beweisführung Vegards auf einem völligen Mißverständnisse dessen, was wir gesagt haben und berührt deshalb unsern Schluß überhaupt nicht.

2. Hr. Vegard sucht ferner die Richtigkeit unseres Befundes bezüglich der  $H_2O$ -Gruppe in Zweifel zu ziehen, indem er unsere Worte in der Arbeit II, „daß die Versuche noch nicht abgeschlossen und in mancher Beziehung verbesserungsfähig seien“, dahin interpretieren zu können glaubt, daß unsere Resultate „an der Grenze des möglichen Fehlers“ und daher unsicher seien. Wir müssen durchaus Einspruch dagegen erheben, daß unsere Worte in diesem ganz willkürlichen Sinne von Hr. Vegard gedeutet werden. Sie sollten, wie aus dem Zusammenhange ganz deutlich hervorgeht, lediglich einen Vorbehalt bezüglich der absoluten Wellenlängenangaben bedeuten, nicht aber bezüglich der relativen (d. h. der Aufspaltung in Partialfrequenzen), auf die es allein ankommt.

3. Ferner versucht Hr. Vegard durch quantitative Vergleiche des von uns gefundenen Verhaltens der  $H_2O$ -Gruppe mit dem der  $SO_4$ - und  $CO_3$ -Gruppe zu zeigen, daß unsere Messungen unsern Schluß auf die ganz analoge Rolle der  $H_2O$ -Gruppe nicht rechtfertigen. Er behauptet, daß die Aufspaltung der  $H_2O$ -Eigenschwingungen in Partialfrequenzen ungefähr von zehnmal kleinerer Größenordnung sei, als die



Aufspaltung der Sulfateigenschwingungen und von etwa hundertmal kleinerer Größenordnung, als bei der  $\text{CO}_3$ -Gruppe.

Darauf ist zunächst zu erwidern, daß diese Behauptung Vegards in ihrer Allgemeinheit gar nicht zutrifft. Denn es gibt unter den von uns untersuchten Sulfaten manche, die eine Aufspaltung von derselben Größenordnung zeigen, wie es bei der  $\text{H}_2\text{O}$ -Gruppe der Fall ist. Wir nennen etwa die Eigenschwingung bei  $16\ \mu$  von Natriumkaliumsulfat, diejenige bei  $9\ \mu$  von Lithiumkaliumsulfat und Nickelsulfat usw. Wir müssen daher wieder sehr bedauern, daß Hr. Vegard unsere Arbeit I nicht sorgfältig gelesen hat. Ferner aber: Selbst die Behauptung des Hrn. Vegard in ihrer allgemeinen Fassung zugegeben, so würde das nichts beweisen. Daß sehr verschiedene Größenordnungen der Aufspaltung (1 zu 10) vorkommen können, beweist ja schon der Vergleich der  $\text{SO}_4$ - und  $\text{CO}_3$ -Gruppe — und darin findet Hr. Vegard offenbar gar nichts Merkwürdiges. Welche Gründe sollten überhaupt dafür vorhanden sein, daß alle Gruppen die nämliche Aufspaltung zeigen sollten? Im Gegenteil spricht schon von vornherein vieles dagegen. Z. B. ist das  $\text{H}_2\text{O}$ -Maximum bei  $3,2\ \mu$  sehr schwach (ca. 4 Proz.) gegenüber den Maximis der  $\text{SO}_4$ -Gruppe (40 bis 80 Proz.) bei  $9\ \mu$  und denen der  $\text{CO}_3$ -Gruppe. Ferner ist bei den Karbonaten doch auch die Doppelbrechung von einer ganz anderen Größenordnung als bei den Sulfaten, was gleichfalls dafür spricht, daß auch der Dichroismus Unterschiede in derselben Größenordnung aufweisen kann. Kurz, wir können diesen Grund in keiner Weise als stichhaltig anerkennen.

Inzwischen ist nun auch die von uns in Arbeit III angekündigte Arbeit von Frl. K. Brieger<sup>1)</sup> erschienen, von der Hr. Vegard leider wieder keine Kenntnis genommen hat. Darin sind, abgesehen von einigen belanglosen Korrekturen der absoluten Wellenlängen, die wir erwartet hatten, *alle quantitativen und qualitativen Ergebnisse unserer Arbeiten vollkommen bestätigt worden.*

Damit ist endgültig der versuchten Antikritik des Hrn. Vegard der Boden entzogen.

4. Hr. Vegard schreibt die Schwingungen sowohl der  $\text{SO}_4$ -, als auch der  $\text{CO}_3$ -Gruppe dem Sauerstoff zu, ohne eine

1) K. Brieger, Zum optischen Verhalten des Kristallwassers. Ann. d. Phys. 57. p. 287. 1918.



nähere Erklärung zu geben, wie er dies meint. Er zieht jedenfalls eine recht merkwürdige Konsequenz daraus, nämlich die, daß die Schwingungen der  $\text{CO}_3$ -Gruppe eigentlich bei  $9\ \mu$  liegen müßten. Da sie dies aber leider nicht tun, — so bildet er den Mittelwert der beiden ersten Eigenschwingungen der  $\text{CO}_3$ -Gruppe, die bei etwa  $6,5\ \mu$  und  $11,5\ \mu$  liegen, und erhält so den von ihm gewünschten Wert von  $9\ \mu$ . Abgesehen davon, daß diese „Berechnung“ schon bei der  $\text{NO}_3$ -Gruppe, bei der die Zuordnung der Partialfrequenzen zu den Polarisationsrichtungen eine durchaus andere ist, als bei der  $\text{CO}_3$ -Gruppe, versagt — von unserer Arbeit IV über die Nitrate, in der dies ausführlich erörtert ist, hat Hr. Vegard wieder keine Notiz genommen — kann man natürlich auf diese Weise alles beweisen, was man will. Es ist wohl nicht notwendig, genauer auf diesen Punkt einzugehen. —

Es läge nunmehr nahe, den allgemeinen Gedankengang der Antikritik Vegards auf seine gemeinsam mit Schjelderup verfaßte Arbeit über die Kristallstruktur der Alaune und die Rolle des Kristallwassers anzuwenden. Da die Herren zweifellos ein falsches Alaunmodell angegeben haben, so könnten wir sicherlich mit mehr Recht als sie nunmehr schließen, daß auch ihr Resultat über das Kristallwasser nicht bewiesen sei. Wie man sich dazu auch stellen möge, jedenfalls steht fest, daß von einer *Priorität* ihrerseits nicht die Rede sein kann.

Wir fassen die Resultate der obigen Darlegungen in die Sätze zusammen:

1. *Das von Vegard und Schjelderup angegebene Alaunmodell ist unrichtig.*
2. *Der von ihnen ausgesprochene Satz über die Rolle des Kristallwassers ist zwei Jahre früher schon von uns bewiesen worden: wir halten unsern Prioritätsanspruch daher in vollem Umfange aufrecht.*
3. *Die umgekehrt nun von Vegard versuchte Kritik unserer Resultate wird als unzutreffend zurückgewiesen.*

Breslau, Phys. Institut d. Universität, April 1919.

(Eingegangen 13. Mai 1919.)

